

## تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 4 مع حلولها

### تمرين 1

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad \text{إذن :}$$

2- لنبين أن  $f$  مصغورة بالعدد 2 على  $\mathbb{R}$   
لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$f(x) - 2 = (x-1)^2 + 2 - 2$$

$$f(x) - 2 = (x-1)^2$$

ونعلم أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 \geq 0$

$$f(x) - 2 \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) \geq 2 \quad \text{ومنه :}$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = -x^2 + 1$$

بين أن الدالة  $f$  مكبورة بالعدد 1 على  $\mathbb{R}$ .

### حل التمرين 1

لنبين أن الدالة  $f$  مكبورة بالعدد 1 على  $\mathbb{R}$ .

لدينا : لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) - 1 = (-x^2 + 1) - 1$$

$$f(x) - 1 = -x^2 + 1 - 1$$

$$f(x) - 1 = -x^2$$

ونعلم أن  $x^2 \geq 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

إذن :  $-x^2 \leq 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ومنه :  $f(x) - 1 \leq 0$

ومنه المطلوب :  $f(x) \leq 1$ .

### تمرين 3

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 + x$$

1- ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ .

بين أن :  $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1)$

2- استنتج أن  $f$  تناقصية على المجال  $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

وتزايدية على المجال  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ .

3- اعط جدول تغيرات  $f$ .

### تمرين 2

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

1- تحقق أن مهما يكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

2- استنتج أن الدالة  $f$  مصغورة بالعدد 2 على

$\mathbb{R}$ .

### حل التمرين 3

1- ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) - f(y) = (x^2 + x) - (y^2 + y)$$

$$= x^2 + x - y^2 - y$$

$$= x^2 - y^2 + x - y$$

$$= (x-y)(x+y) + (x-y)$$

$$= (x-y)(x+y+1)$$

$$f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1) \quad \text{إذن :}$$

### حل التمرين 2

1- لنتحقق من المتساوية.

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2$$

$$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

$$(x-1)^2 + 2 = f(x) \quad \text{إذن :}$$

**تمرين 5**

1 - تحقق من أن : لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

2 - أدرس إشارة  $x^3 - 3x + 2$

3 - نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = \frac{-2}{x}$$

أ - بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

ب - استنتج مقارنة للدالتين  $f$  و  $g$  على  $\mathbb{R}^*$  :

**حل التمرين 5**

1 - التحقق من المتساوية :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2(x + 2) &= (x^2 - 2x + 1)(x + 2) \\ &= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2 \end{aligned}$$

2 - إشارة  $x^3 - 3x + 2$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

وإشارة  $x^3 - 3x + 2$  تلخص في الجدول كما يلي :

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+		+	+
$x + 2$	-	○	+	+
$x^3 - 3x + 2$	-	○	+	+

3 - أ - لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 3 - \left(\frac{-2}{x}\right) \\ &= x^2 - 3 + \frac{2}{x} \\ &= \frac{x^3 - 3x + 2}{x} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$x^3 - 3x + 2$	-	○	+	○	+
$x$	-		-	○	+
$f(x) - g(x)$	-	○	-		+

وبالتالي نستنتج المقارنة المطلوبة.

2 - • على المجال  $]-\infty, \frac{-1}{2}]$  لدينا :

$$x + y \leq \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} x \leq \frac{-1}{2} \\ y \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x + y + 1 \leq 0} \quad \text{إذن :}$$

ومنه : إذا كان  $x \geq y$  فإن  $x - y \geq 0$

وبما أن  $x + y + 1 \leq 0$  فإن :

$$(x - y)(x + y + 1) \leq 0$$

وبالتالي :  $f(x) \leq f(y)$

وهذا يعني أن  $f$  تناقصية على  $]-\infty, \frac{-1}{2}]$  .

• على المجال  $[\frac{-1}{2}, +\infty[$  :

$$x + y \geq \frac{-1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ y \geq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x + y + 1 \geq 0} \quad \text{إذن :}$$

إذا كان  $x \geq y$  فإن  $x - y \geq 0$

ومنه :  $(x - y)(x + y + 1) \geq 0$

إذن  $f$  تزايدية على  $[\frac{-1}{2}, +\infty[$  .

3 - جدول تغيرات  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘ $\frac{-1}{4}$ ↗		

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2}{4} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$