أكاديمية الجهة الشرقية

# تمارين محلولة:عموميات حول الدوال العددية

السنة الأولى من سلك الباكالوريا مسك الآداب والعلوم الانسانية

الأستاذ: نجيب عثماني

## تمرين 1:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x)=3x^2-x+1$  2) $g(x)=\frac{x^3}{2x-4}$

3) $h(x)=\frac{5x+10}{x^2-9}$  4) $m(x)=\sqrt{2x-4}$

**الأجوبة:** 1) $f(x)=3x^2-x+1$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\frac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$ ومنه $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

3) $h(x)=\frac{5x+10}{x^2-9}$ يعني $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x^2-9\neq 0\}$

$x^2-9=0$ يعني $x^2-3^2=0$ يعني $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ يعني $x=-3$ أو $x=3$

ومنه $D_h=\mathbb{R}-\{-3;3\}$

4) $m(x)=\sqrt{2x-4}$ يعني $D_m=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\geq 0\}$

$2x-4\geq 0$ يعني $2x\geq 4$ يعني $x\geq\frac{4}{2}$ يعني $x\geq 2$ منه $D_m=[2;+\infty[$

## تمرين 2:

حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ في الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$  2) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$  4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$

5) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$  6) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$

**الأجوبة:** 1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x-12\neq 0\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

3) $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-1\neq 0\}$

$4x^2-1=0$ يعني $(2x)^2-1^2=0$ يعني $(2x-1)(2x+1)=0$

يعني $2x-1=0$ أو $2x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه

$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ يعني $x(x^2-2)=0$ يعني $x^2-2=0$ أو $x=0$

يعني $x^2=2$ أو $x=0$ يعني $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ أو $x=0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$

يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ و $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

6) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ يعني $-3x\geq -6$ يعني $x\leq\frac{-6}{-3}$ يعني $x\leq 2$ ومنه $D_m=]-\infty;2]$

## تمرين 3:

أدرس زوجية الدالة $f$ في الحالات التالية:

1) $f(x)=3x^2$ . 2) $f(x)=\frac{4}{x}$ 3) $f(x)=2x^5-3x$

4) $f(x)=\frac{x^4-2}{2x^2-1}$ 5) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**الأجوبة:** 1) $f(x)=3x^2$ .

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$ ومنه $f$ دالة زوجية

2) $f(x)=\frac{4}{x}$  $D_f=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$

أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x)=\frac{4}{-x}=-\frac{4}{x}=-f(x)$ ومنه $f$ دالة فردية

3) $f(x)=2x^5-3x$

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=2(-x)^5-3(-x)$

$f(-x)=-2x^5-3(-x)=-(2x^5-3x)=-f(x)$

ومنه $f$ دالة فردية

4) $f(x)=\frac{x^4-2}{2x^2-1}$ نحدد أولا مجموعة التعريف

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-1\neq 0\}$

$2x^2-1=0$ يعني $(\sqrt{2}x)^2-1^2=0$ يعني $(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)=0$

يعني $\sqrt{2}x-1=0$ أو $\sqrt{2}x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

ب) $f(-x)=\frac{(-x)^4-2}{2(-x)^2-1}=\frac{x^4-2}{2x^2-1}=f(x)$

ومنه $g$ دالة زوجية

5) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$ نحدد أولا مجموعة التعريف

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ يعني $(x)^2-2^2=0$ يعني $(x-2)(x+2)=0$

يعني $x-2=0$ أو $x+2=0$ يعني $x=2$ أو $x=-2$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

ب) $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3}{x^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

ومنه $g$ دالة فردية

**<u>تمرين 4:</u>** نعتبر الدوال $f$ و $g$ المعرفة كالتالي:

$$g(x)=\frac{3x}{9x^2-1}$$

1) حدد $(D_g)$ مجموعة تعريف الدالة $g$.

2) أدرس زوجية الدالة $g$. و أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

**<u>الأجوبة:</u>** (1 $g(x)=\frac{x^4}{9x^2-1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/9x^2-1\neq 0\}$

$9x^2-1=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$ **أو** $x=\frac{1}{3}$ ومنه :

$D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$

2) دراسة زوجية الدالة $g$ :

2) أ) لكل $x$ من $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$.

ب) $g(-x)=\frac{3(-x)}{9(-x)^2-1}=-\frac{3x}{9x^2-1}=-g(x)$ ومنه $g$ دالة فردية

التأويل المبياني: النقطة O مركز تماثل لمنحنى الدالة $g$.

**<u>تمرين 5:</u>** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

1.حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

2.بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\leq 1$

3.بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad 0\leq f(x)$

4.ماذا تستنتج ؟ماذا نقول عن الدالة $f$ ؟

**<u>الأجوبة:</u>** (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2=-1\Leftrightarrow x^2+1=0$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 1\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\leq 1$

نقول $f$ دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)$

نقول $f$ دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1-؟ نعم

4)نستنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)\leq 1$

اذن : $f$ مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$

ومنه $f$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$

**<u>تمرين 6:</u>**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة $f$ مصغورة بالعدد 4

**<u>الأجوبة:</u>**يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

وبالتالي $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

**<u>تمرين 7:</u>**نعتبر الدالة $f$ المعرفة

كالتالي: $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة $f$ مكبورة بالعدد 3

**<u>الأجوبة:</u>**يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

وبالتالي $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

**<u>تمرين 8:</u>**لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$

2. أحسب : $f(x)-f(0)$ ؟

3. بين أن $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**<u>الأجوبة:</u>**(1 $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) $f(x)-f(0)=x^2+2-2=x^2$

نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq x^2$

اذن: $f(x)-f(0)\geq 0$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\leq f(x)$

3) وجدنا $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\leq f(x)$

اذن: $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

## تمرين 9:

نكن $f$ دالة معرفة ب:. $f(x)=-x^2+2x+1$

1) أحسب $f(1)$ و $f(1)-f(x)$ مهما تكن $x$ من $\mathbb{R}$.

2) بين أن: $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=2$

$f(1)-f(x)=2-(-x^2+2x+1)=2+x^2-2x-1$

$f(1)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

اذن: $f(1)\geq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2) وجدنا $f(1)\geq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

## تمرين 10:

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+4$

1) حدد $D_f$ و أحسب : $f(0)$

2) بين أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $f(0)=0^2+4=4$

2) $f(x)-f(0)=x^2+4-4=x^2$

نعلم أن : $0\leq x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $f(x)-f(0)\geq 0$

يعني $f(0)\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

## تمرين 11:

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x^2+1$

1) حدد $D_f$ و أحسب : $f(0)$

2) بين أن $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $f(0)=-0^2+1=1$

2) $f(0)-f(x)=1-(-x^2+1)=1+x^2-1=x^2\geq 0$

اذن: $f(0)\geq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

## تمرين 12:

لتكن الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$

بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

1) املأ الجدولين التاليين ومثل الدالتين $f$ و $g$ في نفس المعلم

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | | |

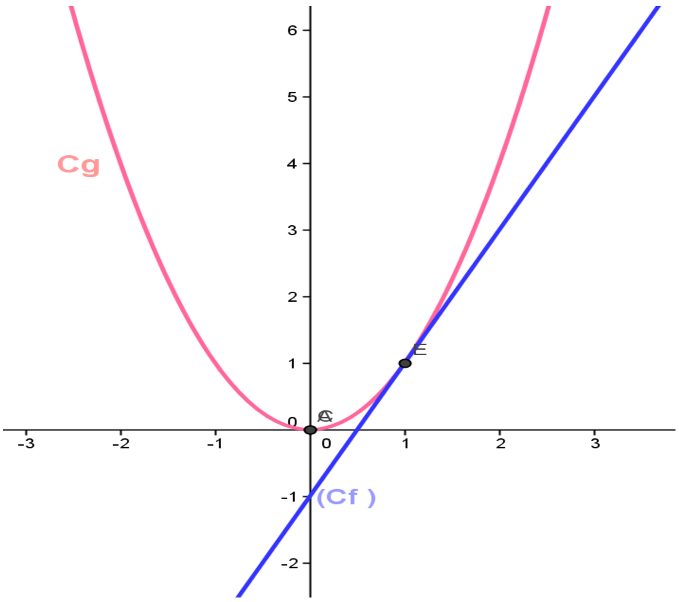
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | |

2) أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | -1 | 1 |

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |




2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ ومنه $g(x)\geq f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين $f$ و $g$ ووجدنا أن : $g\geq f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة $g$ يوجد فوق منحنى الدالة $f$

## تمرين 13:

لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=4x-3$

1) حدد $D_f$

2) أدرس رتابة $f$

3) حدد جدول تغيرات الدالة $f$

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1\neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة $f$ : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(4x_2-3)-(4x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه $T=4\geq 0$ وبالتالي الدالة $f$ تزايدية على $\mathbb{R}$

3) جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

## تمرين 14:

لتكن الدالة $g$ المعرفة كالتالي : $g(x)=-3x+2$

1) حدد $D_g$

2) أدرس رتابة $g$

3) حدد جدول تغيرات الدالة $g$

**الأجوبة:** 1) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1\neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة $g$ : $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-3x_2+2)-(-3x_1+2)}{x_2-x_1}=\frac{-3x_2+3x_1}{x_2-x_1}=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=-3\leq 0$ وبالتالي الدالة $g$ تناقصية على $\mathbb{R}$

3)جدول التغيرات

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 |

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | |

## تمرين 15:

لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2$ .

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$ .

2) أدرس زوجية الدالة $f$

3) أحسب معدل تغير الدالة $f$

4) أدرس رتابة الدالة $f$ على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

5) وحدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

6) حدد مطا ريف الدالة $f$

7) أرسم التمثيل المبياني للدالة $f$

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$ .

ب) $f(-x)=2(-x)^2=2x^2=f(x)$

ومنه $f$ دالة زوجية

3)حساب معدل تغير الدالة $f$

$$T=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x^2_2-2x^2_1}{x_2-x_1}=\frac{2(x^2_2-x^2_1)}{x_2-x_1}$$

$$T=\frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=2(x_2+x_1)$$

4) أ) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ :

ليكن : $x_1\in[0;+\infty[$ و $x_2\in[0;+\infty[$

اذن $T=2(x_2+x_1)\geq 0$

ومنه الدالة $f$ تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ :

ليكن : $x_1\in]-\infty;0]$ و $x_2\in]-\infty;0]$

اذن $T=2(x_2+x_1)\leq 0$

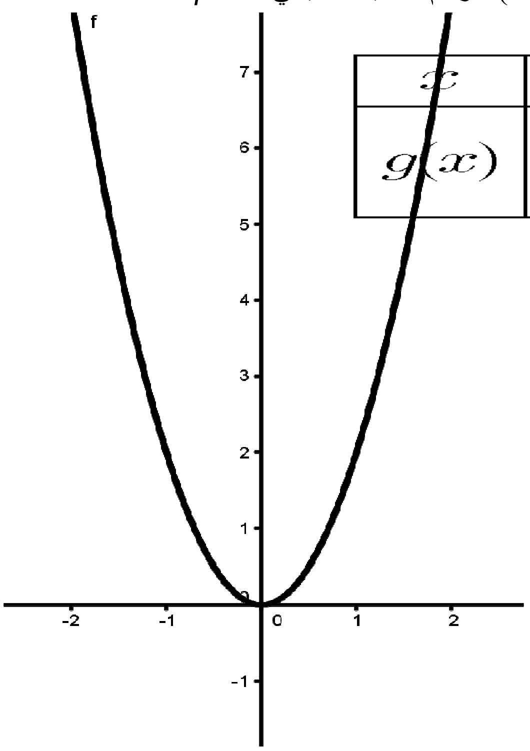
ومنه الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty;0]$

5)حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ |

6) $f$ تقبل قيمة دنيا عند $x_0=0$

7) رسم التمثيل المبياني للدالة $f$




**« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien**