أكاديمية الجهة الشرقية

# تمارين محلولة:دراسة الدوال وتمثيلها
## السنة الأولى من سلك الباكالوريا مسلك الآداب والعلوم الانسانية

الأستاذ: نجيب عثماني

**تمرين 1 :** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

**الأجوبة :**

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$$

| $x$ | $-\infty$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| $3x-6$ | $-$ 0 $+$ |

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين 2 :** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{x+3}{2x+2}$$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

**الأجوبة :** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+3}{2x+2}$

| $x$ | $-\infty$ $-1$ $+\infty$ |
|---|---|
| $2x+2$ | $-$ 0 $+$ |

$\lim\limits_{x\to -1^+} x+3=2$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+2=0^+$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} 2x+2=0^-$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين 3:** نعتبر الدالة العددية $f$

للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

**الأجوبة :**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين 4 :** أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{5}{2x-6}$ و $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{5}{2x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{6x+2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{6x+2}$

**الأجوبة :**

1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} x+3=2$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} x-2=0^-$

| $x$ | $-\infty$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| $x-2$ | $-$ 0 $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}=-\infty$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{5}{2x-6}$ و $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{5}{2x-6}$

| $x$ | $-\infty$ 3 $+\infty$ |
|---|---|
| $2x-6$ | $-$ 0 $+$ |

$\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-6=0^-$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{5}{2x-6}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{5}{2x-6}=-\infty$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $x=3$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

3)

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{x}=2$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

4)

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{6x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{6x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين 5 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(D)$ الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

8) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ و $(D)$.

9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq 0$ .

**الأجوبة :** 1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(x^2+4x+3\right)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ |

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

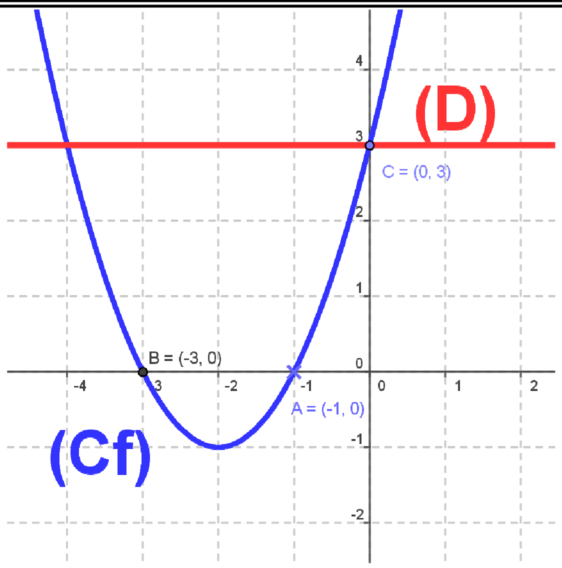
6) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7) رسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(D): y=3$

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 |




8) تحديد نقط تقاطع $(C_f)$ و $(D)$.

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم: $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

**تمرين6:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**الأجوبة :**

1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+2x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2+2x+3=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(-x^2+2x+3\right)'=-2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $-2x+2=0$ يعني $x=1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+2$ | $+$ | $0$ | $-$ |

اذا كانت: $x\in[1;+\infty[$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

اذا كانت: $x\in]-\infty;1]$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**(5**

تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة :

$f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(3;0)$

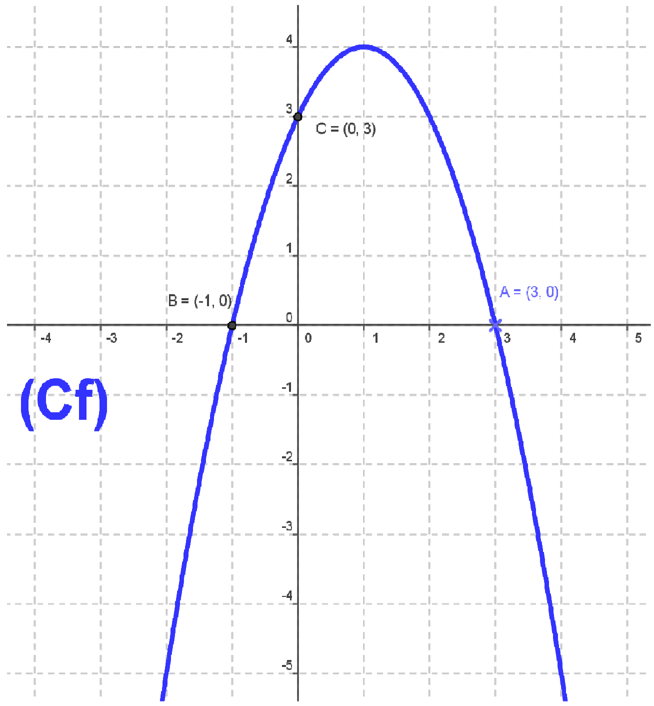
6)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط: $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7)رسم: $C_f$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -5 | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | -5 |




**تمرين7 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2-2x-3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$.

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**الأجوبة :** 1)الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-2x-3=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-2x-3=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(2x^2-2x-3\right)'=4x-2$

$f'(x)=0$ يعني $4x-2=0$ يعني $x=\dfrac{1}{2}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

اذا كانت: $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية

اذا كانت: $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{7}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5)تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2-2x-3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-2$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times(-3)=4+24=28>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{2+\sqrt{28}}{2\times2}=\dfrac{2+\sqrt{4\times7}}{2\times2}=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{2\times2}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2};0\right)$ و $B\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2};0\right)$

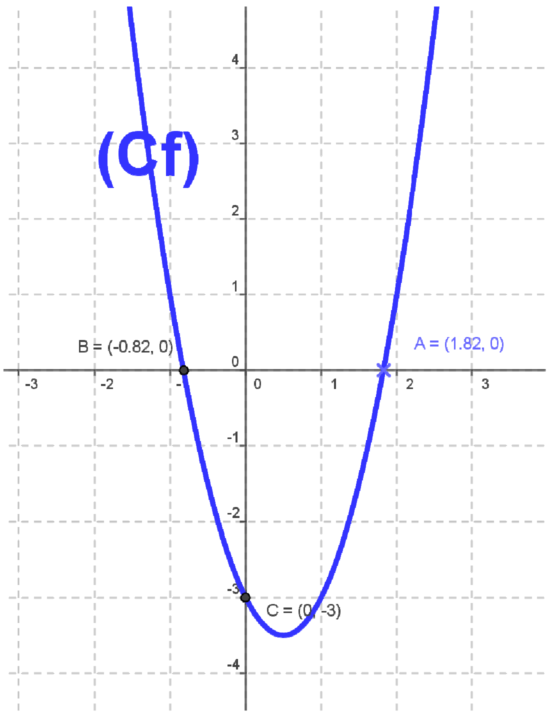
6)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط: $f(0)$

$f(0)=-3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-3)$

7)رسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

| x | -2 | -1 | 0 | 1/2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 9 | 1 | -3 | -7/2 | -3 | 1 | 9 |




**تمرين8:** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة $g$.
2. أحسب نهايات الدالة $g$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$.
4. أنشئ منحنى الدالة $g$.

**الأجوبة :**

1) حيز تعريف الدالة $g$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)حساب الدالة المشتقة :

**طريقة 1 :**

نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ (10 $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

$$g'(x)=\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x+1)-(2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1\times(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لكل $x$ من $D$ $g'(x)=\dfrac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

**طريقة 2 :**

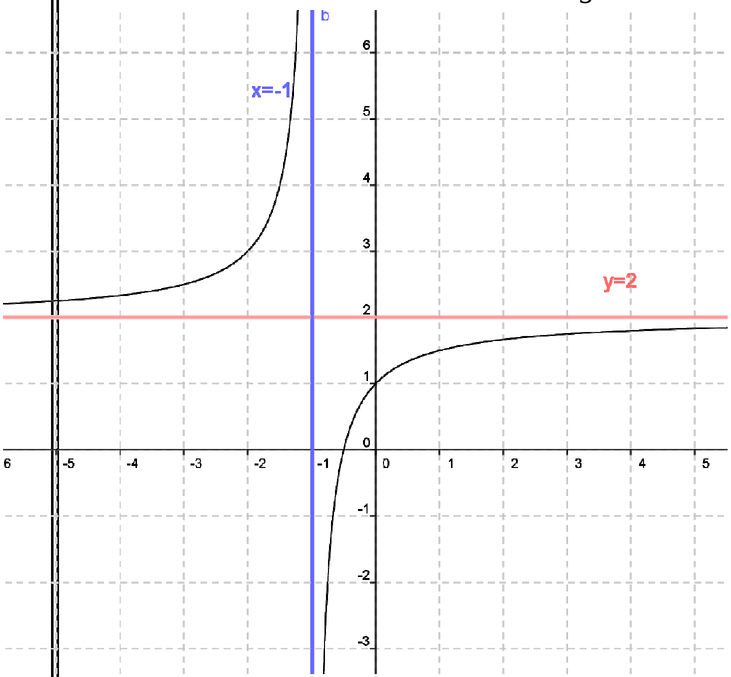
لكل $x$ من $D$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)>0$

4)جدول تغيرات الدالة.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $g(x)$ | $2$ ↗ | | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $2$ |

منحنى الدالة $g$.



**تمرين9 :** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

1)حدد حيز تعريف الدالة $f$.
2)أحسب نهايات الدالة $f$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3)أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4)املأ الجدول التالي :

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

5)أنشئ منحنى الدالة $f$.

**الأجوبة :**

1)حيز تعريف الدالة $f$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}$

و منه $D=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+1}{x-2}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)**طريقة 1 :**

$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

لكل $x$ من $D$ لدينا:

$$g'(x)=\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)'=\frac{(3x+1)'(x-2)-(3x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{3(x-2)-1\times(3x+1)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2}=\dfrac{-7}{(x-2)^2}\leq 0$ لكل $x$ من $D$

**طريقة 2 :** لكل $x$ من $D$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{(x-2)^2}=\dfrac{-7}{(x-2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, f'(x)<0$

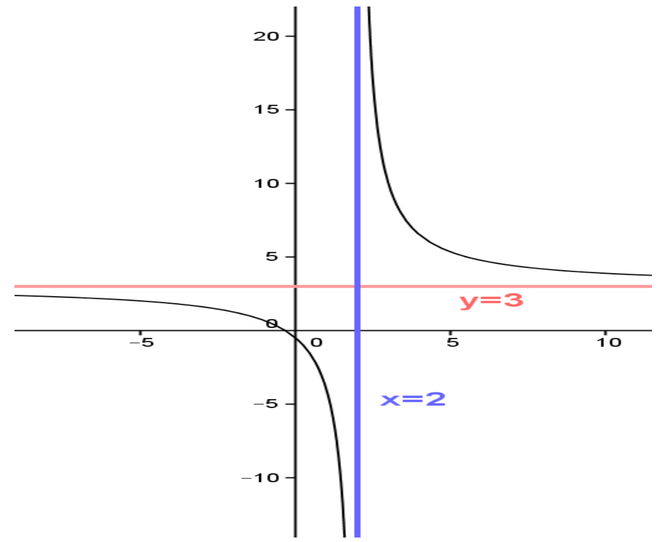
جدول تغيرات الدالة.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | 3 | $\searrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\searrow$ | 3 |

(4

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 /3 | -1/2 | -4 | | 10 | 13/2 | 4 |

(5




**تمرين10:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
و $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$
3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس إشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.
6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.
7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**الأجوبة :**

1)حيز تعريف الدالة $f$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$

و منه $D=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x+3}{x+2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x+3}{x+2}=+\infty$ و

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)**طريقة 1 :**

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

لكل $x$ من $D$ لدينا:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)'=\frac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)-1\times(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}>0$ لكل $x$ من $D$

**طريقة 2:** لكل $x$ من $D$ لدينا: $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ f'(x)>0$

4) جدول تغيرات الدالة.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $2 \nearrow +\infty$ | ‖ | $-\infty \nearrow 2$ |

**5)** تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة :

$f(x)=0$ يعني $\frac{2x+3}{x+2}=0$ يعني $2x+3=0$

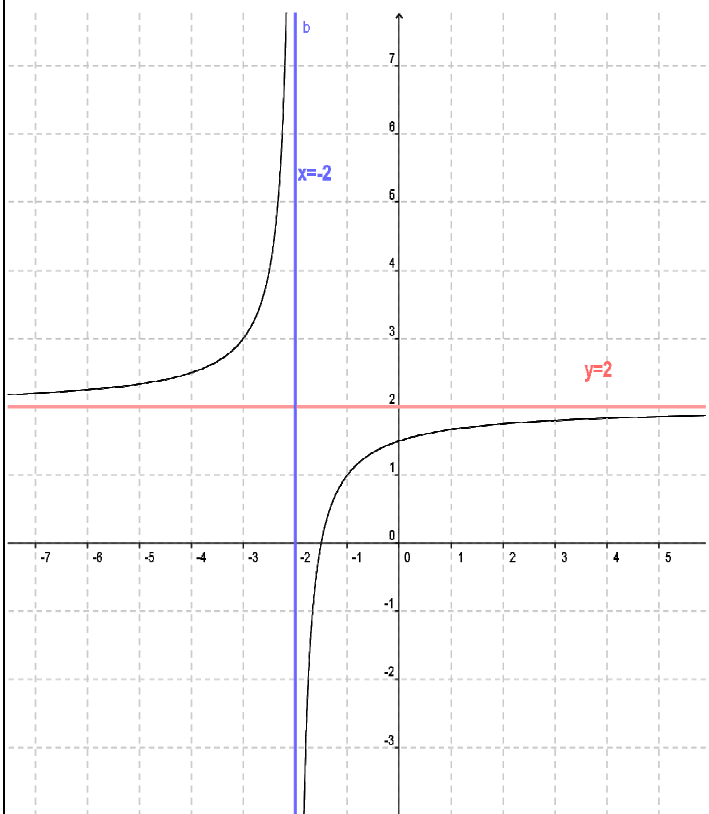
يعني $x=\frac{-3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع مع محور الأفاصيلهي: $A\left(\frac{-3}{2};0\right)$

6) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=\frac{3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

7) رسم: $C_f$




**تمرين11:** نعتبر الدالة $f$

المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ و
2. أدرس زوجية الدالة $f$
3. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات $D_f$
4. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
5. حدد جدول تغيرات الدالة $f$
6. حدد معادلة لمماس المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$
7. حدد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.
8. أرسم المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم

**الأجوبة:** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه $f$ دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

(5

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $16/3$ | $\searrow$ | $-16/3$ | $\nearrow +\infty$ |

6) معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1)\Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

7) أ) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

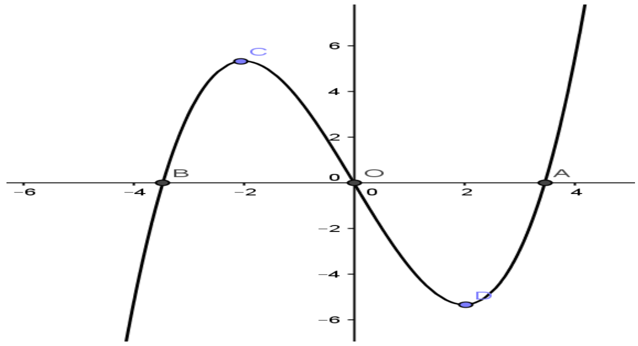
يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

8)التمثيل المبياني للدالة $f$




**تمرين12 :** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$

ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات مجموعة التعريف
2. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
3. ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .
4. حدد معادلة للمماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ في النقطة $A(1;2)$
5. أحسب $f(-1)$ و و $f(2)$ أنشئ $(C_f)$ و $(T)$.

**الأجوبة :** $f(x)=x^3-3x^2+4$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

(2 $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(3

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

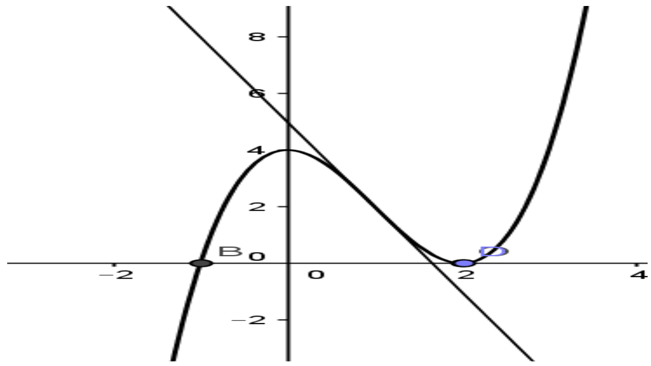
4)معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=2$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+5$

5)التمثيل المبياني للدالة $f$

$f(-1)=0$ و $f(2)=0$




**تمرين13:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات $D_f$
3) أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$
5) حدد معادلة لمماس المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$
6) أرسم المنحني $(C_f)$ معلم متعامد ممنظم

**الأجوبة :** $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(4

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5)معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=-1$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-1-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+2$

6)التمثيل المبياني للدالة $f$