ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المتتاليات العددية:

I. متتالية حسابية

- لكي نبين أن متتالية حسابية نحسب: $u_{n+1}-u_n$ العدد r الذي نجده هو الأساس و $u_n=u_0+nr$ هي الكتابة بدلالة n

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1 فان : $u_n=u_1+(n-1)r$

وبصفة عامة : $u_n=u_p+(n-p)r$

- مجموع حدود متتابعة لمتتالية $(u_n)_{n\in I}$ حسابية:

$S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n \quad n\succ p\geq n_0$

هو : $S_n=(n-p+1)\left(\dfrac{u_n+u_p}{2}\right)$

ملاحظة : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$

أمثلة: $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\dfrac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\dfrac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\dfrac{u_7+u_{25}}{2}$

II. متتالية هندسية

- لكي نبين أن متتالية هندسية نحسب : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ العدد q الذي نجده هو الأساس و $u_n=u_0\times q^n$ هي الكتابة بدلالة n
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_0 فان : $u_n=u_0q^{n-0}$
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_1 فان : $u_n=u_1q^{n-1}$
- وبصفة عامة : $u_n=u_pq^{n-p}$
- مجموع حدود متتابعة لمتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هندسية أساسها q

$q\neq 1$ هو: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

مثال: $S_1=u_4+u_5+\cdots+u_{30}=u_4\dfrac{1-q^{30-4+1}}{1-q}$

III. أمثلة :

مثال1: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2n+3$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

الجواب: $u_0=2\times 0+3=3$ و $u_1=2\times 1+3=5$

$u_2=2\times 2+3=4+3=7$ و $u_3=2\times 3+3=9$

مثال2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $u_n=\dfrac{n+3}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(n+1)+3}{4}-\dfrac{n+3}{4}=\dfrac{1}{4}=r$

ومنه المتتالية هي حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول : $u_0=\dfrac{3}{4}$

مثال3: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$ و $u_6=31$

1) أحسب u_0 2) أكتب u_n بدلالة n 3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_6=u_0+6\times\dfrac{1}{2}$ **يعني** $31=u_0+3$ **يعني** $28=u_0$

2) $u_n=u_0+nr$ يعني $u_n=28+\dfrac{n}{2}$

3) $u_{2015}=28+\dfrac{2015}{2}=\dfrac{2071}{2}$

و $u_{2016}=28+\dfrac{2016}{2}=28+1008=1036$

مثال4: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_8 و u_{13}

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

أجوبة : 1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times 8+5=29$

2) $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\dfrac{u_0+u_{13}}{2}$

$S=14\dfrac{u_0+u_{13}}{2}=\dfrac{14}{2}(5+u_{13})$ ومنه نحسب: $u_{13}=3\times 13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times 49=343$

مثال5: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2\times 3^n$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$
2. أحسب $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

أجوبة: (1

$u_0=2\times 3^0=2\times 1=2$ و $u_1=2\times 3^1=6$ و $u_2=2\times 3^2=18$ و $u_3=2\times 3^3=54$

(2 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n}=\dfrac{3^{n+1}}{3^n}=\dfrac{3^n\times 3^1}{3^n}=3^1=3=q$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$