أكاديمية الجهة الشرقية

الدرس الرابع :

المتتاليات العددية

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

ـ المتتاليات العددية؛ ـ المتتاليات الحسابية؛ ـ المتتاليات الهندسية	ـ التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛ ـ حساب الحد العام لمتتالية هندسية أو لمتتالية حسابية؛ ـ حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية؛ ـ استعمال المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية في حل مسائل متنوعة.	ـ يتم تقديم مفهوم المتتاليات من خلال وضعيات مناسبة ـ يعتبر أي بناء نظري لمفهوم المتتالية خارج المقرر؛ ـ يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية.

I. المتتاليات الحسابية

نشاط1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...$

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , ...$

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...$

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , ...$

$1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ...$

ليكن I هو $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

نشاط2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n+3$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

الجواب : $u_0=2\times0+3=3$ و $u_1=2\times1+3=5$

$u_2=2\times2+3=4+3=7$ و $u_3=2\times3+3=9$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

1.تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث :

$$\forall n\geq n_0\quad u_{n+1}=u_n+r$$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

مثال: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n-1$$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$
3. أحسب $u_{n+1}-u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : $u_0=2\times0-1=0-1=-1$

$u_1=2\times1-1=2-1=1$

$u_2=2\times2-1=4-1=3$

$u_3=2\times3-1=6-1=5$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$u_{n+1}-u_n=(2(n+1)-1)-(2n-1)=(2n+2-1)-(2n-1)$

اذن: $=(2n+2-1)-(2n-1)=(2n+1)-(2n-1)=2n+1-2n+1$

$u_{n+1}-u_n=2=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

تمرين1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n+3$$

1. أحسب : $u_{n+1}-u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=\frac{n+3}{4}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)+3}{4}-\frac{n+3}{4}=\frac{1}{4}=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $r=\frac{1}{4}$

وحدها الأول : $u_0=\frac{3}{4}$

1. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فان : $u_n=u_0+nr$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

فان : $u_n=u_p+(n-p)r$ لكل $n\geq n_0$ و $p\geq n_0$

تمرين3: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و $u_6=31$

1)أحسب u_0 2)أكتب u_n بدلالة n 3)أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

ومنه : $u_6 = u_0 + 6\times\frac{1}{2}$ **يعني** $31 = u_0 + 3$ **يعني** $28 = u_0$

2) $u_n = u_0 + nr$ يعني $u_n = 28 + \frac{n}{2}$

3) $u_{2015} = 28 + \frac{2015}{2} = \frac{2071}{2}$

و $u_{2016} = 28 + \frac{2016}{2} = 28+1008 = 1036$

تمرين4: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0=5$

و $u_{100}=-45$

1)حدد r 2)أحسب : u_{2015} و u_{2016}

أجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_{100}=u_0+100r$ **يعني** $-45=5+100r$ **يعني** $-50=100r$ **يعني**

$r=-\frac{1}{2}$

2) (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$ يعني $u_{2015}=5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015}=5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015}=\frac{10-2015}{2}=\frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016}=\frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2}=\frac{-2006}{2}=-1003$

2.مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ حيث $n\succ p\geq n_0$

لدينا $S_n=(n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

مثال: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_8 و u_{13}

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

أجوبة : 1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times8+5=29$

2) $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

$S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ ومنه نحسب: $u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

تمرين5:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

الجواب: 1) $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

2) $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي: $S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$

تمرين6: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_{10}

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$

أجوبة : 1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=3+2(n-0)$ أي: $u_n=2n+3$

ومنه : $u_1=5$ و $u_{10}=23$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_{10}=(10-1+1)\frac{u_1+u_{10}}{2}$

$S=10\frac{5+23}{2}=10\times\frac{28}{2}=10\times14=140$

تمرين7: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=-2$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_6

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

أجوبة : 1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=-2$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=-2+4(n-0)$ أي:

$u_n=4n-2$

ومنه : $u_1=2$ و $u_6=22$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$

$S=6\frac{2+22}{2}=6\times\frac{24}{2}=6\times12=72$

II. المتتاليات الهندسية

نشاط1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...$
2. $1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , -\frac{1}{8} , \frac{1}{16} , -\frac{1}{32} , ...$

نشاط2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2\times3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: 1)
$u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و $u_3=2\times3^3=54$

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $\forall n\ge n_0 \quad u_{n+1}=qu_n$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

تمرين8: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ بحيث: $u_n=5\times3^{2n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

الجواب: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times3^{2n+3}}{5\times3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$

إذن: المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=9$ وحدها الأول $u_0=15$

تمرين9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان :

$$u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان :

$u_n=u_mq^{n-m}$ لكل $n\ge n_0$ و $m\ge n_0$

تمرين10: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5=\frac{243}{2}$ و $u_2=\frac{9}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

الجواب : لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n=u_mq^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5=u_2q^{5-2}$ يعني $\frac{243}{2}=\frac{9}{2}q^3$ يعني $q^3=\frac{243}{9}$ يعني $q^3=27$ يعني $q=3$

لدينا أيضا : $u_n=u_2q^{n-2}$ يعني $u_n=\frac{9}{2}3^{n-2}=\frac{3^2\times3^{n-2}}{2}=\frac{3^{n-2+2}}{2}=\frac{3^n}{2}$

تمرين11: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=81$ و أساسها : $q=\frac{1}{3}$

1) أكتب u_n بدلالة n 2) أحسب u_1 و u_2 و u_3

3) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=1$

الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=81$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ ومنه : $u_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_3=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{81}{27}=3$

3) $u_n=1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n}=1$ يعني

$\frac{81}{3^n}=1$ يعني $81=3^n$ يعني $n=4$

تمرين12: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=5$ و $u_3=40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=2$
2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3=u_0q^{3-0}$ يعني $40=5q^3$ يعني $q^3=\frac{40}{5}$ يعني $q^3=8$ يعني $q=2$

2) $u_n=5\times(2)^n$

$u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و $u_4=5\times(2)^4=5\times16=80$

3) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_5=2\times u_4=2\times80=160$ ومنه : $n=5$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

إذا كان $q\ne1$ فان : $S_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

مثال: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5$

الجواب: 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times u_n}{u_n}=3=q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

2) $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\frac{1-3^5}{1-3}=9\times\frac{1-3^5}{-2}=9\times\frac{1-243}{-2}=9\times\frac{-242}{-2}=1029$

تمرين13: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5=486$

و $u_7=4374$ و أساسها $q\succ 0$

1)حدد أساس المتتالية (u_n) 2) أحسب u_0 و u_{10}

3) أكتب u_n بدلالة n 4) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_5+\cdots+u_{2009}$

أجوبة : (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_7=u_5q^{7-5}$ يعني : $q^2=\frac{4374}{486}=9$

يعني : $q=3$ أو $q=-3$ وحسب المعطيات : $q\succ 0$

اذن: $q=3$

2) (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_5=u_0q^{5-0}$ يعني $486=u_0 3^5$

يعني $u_0=\frac{486}{3^5}=\frac{486}{243}=2$

$u_{10}=u_7q^{10-7}$ يعني $u_{10}=u_7q^3$ يعني $u_{10}=4374\times3^3=4374\times27=118098$

3) $u_n=u_0q^{n-0}$ يعني $u_n=2\times3^n$

4) $S_n=u_0+u_1+u_1+\cdots+u_{2009}=u_0\times\frac{1-q^{20095-0+1}}{1-q}=u_0\times\frac{1-q^{2010}}{1-q}$

$S_n=2\times\frac{1-3^{2010}}{1-3}=-\left(1-3^{2010}\right)=3^{2010}-1$

تمرين14: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$u_{n+1}=2\times U_n$ و $u_0=3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية
2. أعبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$