أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المتتاليات العددية

السنة الأولى من سلك الباكالوريا مسلك الآداب والعلوم الانسانية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10$, ...

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12$, ...

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$, ...

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...

$1, 4 , 9 , 16 , 25 , 36$, ...

الأجوبة:1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18$

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , -15 , -18 , -21 , -24$

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , 729 , 2187 , 6561 , 19683$

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \frac{1}{64} , \frac{1}{128} , \frac{1}{256} , \frac{1}{512}$

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

الأجوبة:1) $u_0 = 2\times 0+3 = 3$

2) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_2 = 2\times 2+3 = 4+3 = 7$ و $u_3 = 2\times 3+3 = 9$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

تمرين3: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) أحسب حدها الأول u_0 و أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

2) أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

الأجوبة:1) $u_0 = 2\times 0-1 = 0-1 = -1$

$u_1 = 2\times 1-1 = 2-1 = 1$

$u_2 = 2\times 2-1 = 4-1 = 3$

$u_3 = 2\times 3-1 = 6-1 = 5$

(2

$u_{n+1}-u_n = (2(n+1)-1)-(2n-1) = (2n+2-1)-(2n-1)$

اذن: $= (2n+2-1)-(2n-1) = (2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1$

$u_{n+1}-u_n = 2 = r$

ومنه أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_n = 5n+6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

أحسب : $u_{n+1}-u_n$ و ماذا تستنتج ؟

الأجوبة:

اذ $u_{n+1}-u_n = (5(n+1)+6)-(5n+6) = (5n+5+6)-(5n+6)$

ن: $= (5n+11)-(5n+6) = 5n+11-5n-6$

$u_{n+1}-u_n = 5 = r$

أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 5$

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = \frac{n+3}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n = \frac{(n+1)+3}{4}-\frac{n+3}{4} = \frac{1}{4} = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4} = r$

وحدها الأول : $u_0 = \frac{3}{4}$

تمرين6: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و $u_6 = 31$

1) أحسب u_0 2) أكتب u_n بدلالة n

3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

الأجوبة:1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

ومنه : $u_6 = u_0 + 6\times\frac{1}{2}$ **يعني** $31 = u_0 + 3$ **يعني** $28 = u_0$

2) $u_n = u_0 + nr$ يعني $u_n = 28+\frac{n}{2}$

3) $u_{2015} = 28+\frac{2015}{2} = \frac{2071}{2}$

و $u_{2016} = 28+\frac{2016}{2} = 28+1008 = 1036$

تمرين7: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0 = 5$

و $u_{100} = -45$ 1) حدد r 2) أحسب : u_{2015} و u_{2016}

الأجوبة:1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

ومنه : $u_{100} = u_0 + 100r$ **يعني** $-45 = 5+100r$

يعني $-50 = 100r$ **يعني** $r = -\frac{1}{2}$

2) (u_n) حسابية اذن :

$u_n = u_0 + nr$ يعني $u_{2015} = 5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015} = 5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015} = \frac{10-2015}{2} = \frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016} = \frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2} = \frac{-2006}{2} = -1003$

تمرين8: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_8 و u_{13}

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

الأجوبة:1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه: $u_8=3\times8+5=29$

2) $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

$S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ ومنه نحسب: $u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

تمرين9:

1) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

الأجوبة:1) $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

2) $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي:

$$S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$$

تمرين10: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_{10}

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$

الأجوبة:1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$ فان: $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=3+2(n-0)$

أي: $u_n=2n+3$

ومنه: $u_1=5$ و $u_{10}=23$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_{10}=(10-1+1)\frac{u_1+u_{10}}{2}$

$S=10\frac{5+23}{2}=10\times\frac{28}{2}=10\times14=140$

تمرين11: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=-2$

1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_6

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

الأجوبة:1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=-2$

فان: $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=-2+4(n-0)$

أي: $u_n=4n-2$

ومنه: $u_1=2$ و $u_6=22$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$

$S=6\frac{2+22}{2}=6\times\frac{24}{2}=6\times12=72$

تمرين12: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

2) أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الأجوبة:1) $u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و

$u_3=2\times3^3=54$

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$

وحدها الأول $u_0=2$

تمرين13: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ بحيث: $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=5\times3^{2n+1}$

بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

الأجوبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times3^{2n+3}}{5\times3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=9$

وحدها الأول $u_0=15$

تمرين14: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

الأجوبة:

اذن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(n+1)-n} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1} = \frac{2}{5} = q$

المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$

وحدها الأول $u_0 = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 3\times1 = 3$

تمرين15: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = \frac{243}{2}$

و $u_2 = \frac{9}{2}$ حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

الأجوبة: لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n = u_m q^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5 = u_2 q^{5-2}$ يعني : $\frac{243}{2} = \frac{9}{2}q^3$

يعني $q^3 = \frac{243}{9}$ يعني : $q^3 = 27$ يعني : $q = 3$

لدينا أيضا : $u_n = u_2 q^{n-2}$ يعني : $u_n = \frac{9}{2}3^{n-2} = \frac{3^2\times3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2}$

تمرين16: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n)

بحيث حدها الأول $u_0 = 81$ وأساسها : $q = \frac{1}{3}$

1)أكتب u_n بدلالة n 2)أحسب u_1 و u_2 و u_3

3)حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

الأجوبة:1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 81$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ ومنه: $u_n = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$

و $u_3 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$

3) $u_n = 1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n} = 1$ يعني

$\frac{81}{3^n} = 1$ يعني $81 = 3^n$ يعني $n = 4$

تمرين17: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 5$

و $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$
2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

الأجوبة:1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3 = u_0 q^{3-0}$ يعني : $40 = 5q^3$ يعني : $q^3 = \frac{40}{5}$ يعني :

يعني $q^3 = 8$ يعني : $q = 2$

2) $u_n = 5\times(2)^n$

$u_4 = 5\times(2)^4 = 5\times16 = 80$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$

3) $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$

و $u_5 = 2\times u_4 = 2\times80 = 160$ ومنه : $n = 5$

تمرين18: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة

بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3\times U_n$ و $u_0 = 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

الأجوبة:1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times u_n}{u_n} = 3 = q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

2) $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ أي: $u_n = 3\times(3)^n = 3^1\times(3)^n = (3)^{n+1}$

3) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5 = u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q} = u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$

$S_n = 9\times\frac{1-3^5}{1-3} = 9\times\frac{1-3^5}{-2} = 9\times\frac{1-243}{-2} = 9\times\frac{-242}{-2} = 1029$

تمرين19: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$

و $u_7 = 4374$ و أساسها $q \succ 0$

1)حدد أساس المتتالية (u_n) 2) أحسب u_0 و u_{10}

3) أكتب u_n بدلالة n 4) أحسب **المجموع التالي** : $S = u_0 + u_5 + \cdots + u_{2009}$

الأجوبة:1) (u_n) متتالية هندسية

اذن: $u_7 = u_5 q^{7-5}$ يعني : $q^2 = \frac{4374}{486} = 9$ يعني : $q = 3$ أو $q = -3$

وحسب المعطيات : $q \succ 0$ اذن: $q = 3$

2) (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_5 = u_0 q^{5-0}$ يعني $486 = u_0 3^5$

يعني $u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$

$u_{10} = u_7 q^{10-7}$ يعني $u_{10} = u_7 q^3$ يعني

$u_{10} = 4374\times3^3 = 4374\times27 = 118098$

3) $u_n = u_0 q^{n-0}$ يعني $u_n = 2\times3^n$

4) $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + \cdots + u_{2009} = u_0\times\frac{1-q^{20095-0+1}}{1-q} = u_0\times\frac{1-q^{2010}}{1-q}$

$S_n = 2\times\frac{1-3^{2010}}{1-3} = -\left(1-3^{2010}\right) = 3^{2010} - 1$

تمرين20 للبحث: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة

بالصيغة التالية :

$u_{n+1} = 2\times U_n$ و $u_0 = 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية
2. أعبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

الأستاذ : عثماني نجيب