ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الحساب العددي

I. التناسبية والنسب المئوية والسلم

تعريف : a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$
نقول إن الأعداد a و b متناسبة مع c و d على التوالي إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

مثال1: اشترت خديجة سروالا وقميصا بمجموع قدره 105dh اذا علمت أن ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 6 و 9 فاحسب ثمن القميص والسروال

الجواب : ليكن x ثمن السروال و y ثمن القميص
بما أن : ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 9 و 6 فان : $\frac{x}{9} = \frac{y}{6}$ اذن : $\frac{x}{9} = \frac{y}{6} = \frac{x+y}{15} = \frac{105}{15} = 7$
اذن : $\frac{x}{9} = 7$ و $\frac{y}{6} = 7$ يعني $x = 63$ و $y = 42$

مثال2: يتكون قسم من 40 تلميذا منهم 15 من الإناث
حدد النسبة المئوية للإناث و الذكور في هذا القسم

الجواب : نسبة الاناث : $t\% = \left(\frac{15}{40}\right) \times 100 = 0.375 \times 100 = 37.5\%$

نسبة الذكور : $t\% = \left(\frac{25}{40}\right) \times 100 = 0.625 \times 100 = 62.5\%$

مثال3 : ارتفع ثمن البنزين من 5.20 DH الى 5.98 DH للتر الواحد ما نسبة المئوية الزيادة؟

الجواب : $t\% = \left(\frac{5.98 - 5.20}{5.20}\right) \times 100 = \frac{0.98}{5.20} \times 100 = 0.15 \times 100 = 15\%$

مثال4: انخفض ثمن آلة حاسبة من 150 DH الى 135 DH
ما نسبة المئوية للتخفيض؟

الجواب : $t\% = \left(\frac{150 - 135}{150}\right) \times 100 = \frac{15}{150} \times 100 = 0.1 \times 100 = 10\%$

مثال5: يبلغ ثمن حذاء رياضي 170DH وثمن بذلة رياضية 230DH و زيد في ثمن الحذاء بنسبة 6% وخفض في ثمن البذلة الرياضية بنسبة 8 % أحسب الثمن الجديد للحذاء والبذلة

الجواب : ثمن الحذاء الرياضي بعد الزيادة هو :
$$A = 170 + \left(\frac{6}{100}\right) \times 170 = 170 + 10,2 = 182,2DH$$
ثمن البذلة الرياضية بعد التخفيض هي :
$$B = 230 - \left(\frac{8}{100}\right) \times 230 = 230 - 18,4 = 211,6DH$$

مثال6: اذا علمت أن طول طريق سيار على خريطة ذات السلم $\frac{1}{1000000}$ هو 0 .1m ما الطول الحقيقي للطريق السيار؟

الجواب : الطول الحقيقي للطريق السيار هو :
$$A = 0.1 \times 1000000 = 100000m = 100km$$

II. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :
(1 $-2x + 22 = 0$ (2 $3(2x+5) = 6x - 1$
(3 $4(x-2) = 6x - 2(x+4)$ (4 $9x^2 - 16 = 0$

الجواب: (1 $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x = -22$
يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

(2 $3(2x+5) = 6x - 1$ **يعني** $6x + 15 = 6x - 1$
يعني $6x - 6x = -1 - 15$ **يعني** $0x = -16$ **يعني** $0 = -16$
و هذا غير ممكن ومنه : $S = \varnothing$

(3 $4(x-2) = 6x - 2(x+4)$ **يعني** $4x - 8 = 6x - 2x - 8$
يعني $4x - 4x + 8 - 8 = 0$ **يعني** $0 = 0$
ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S = \mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية
(التعميل) $9x^2 - 16 = 0$ **يعني** $(3x)^2 - 4^2 = 0$
يعني $(3x-4)(3x+4) = 0$ **يعني** $3x + 4 = 0$ أو $3x - 4 = 0$
يعني $3x = -4$ أو $3x = 4$ **يعني** $x = \frac{-4}{3}$ أو $x = \frac{4}{3}$
ومنه : $S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل متراجحة على الشكل
$ax + b \geq 0$ أو $ax + b \succ 0$ أو $ax + b \leq 0$ أو $ax + b \prec 0$
تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

مثال1: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:
(1 $-2x + 12 > 0$ (2 $5x - 15 \leq 0$

أجوبة : (1 $-2x + 12 > 0$ $-2x + 12 = 0$ يكافئ $x = 6$
و بما أن: $a = -2$ و $a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	+	0	−

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

(2 $5x - 15 \leq 0$ $5x - 15 = 0$ يكافئ $x = 3$
و بما أن: $a = 5$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x - 15 = 0$	−	0	+

و منه فان : $S =]-\infty; 6[$

مثال2: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحة التالية:
$$4x^2 - 9 \geq 0$$
الجواب : $4x^2 - 9 = 0$ **يعني** $(2x)^2 - 3^2 = 0$ **يعني**
$$(2x-3)(2x+3) = 0$$
يعني $2x + 3 = 0$ أو $2x - 3 = 0$ **يعني** $x = \frac{-3}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$

الطريقة : في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

IV. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

لحل المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ نحسب مميز المعادلة

$\Delta=b^2-4\times a\times c$

✓ **إذا كان** $\Delta\prec 0$ **فان** المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ **إذا كان** $\Delta=0$ **فان** المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $-\frac{b}{2a}$

✓ **إذا كان** $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين هما: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S.

مثال1: المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$. لأن $\Delta\prec 0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

مثال 2: المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$. حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$ بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما: $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

V. إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c:

الحالة1: إذا كان $\Delta\succ 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	عكس اشارة a	0	اشارة a	

الحالة2: إذا كان $\Delta=0$ و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	0	اشارة a	

الحالة3: إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a

فان:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$		اشارة a	

مثال1: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq 0$

أجوبة: 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

مثال2: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2>0$

أجوبة: 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)=-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

2) حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

مثال3: أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$

وحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

أجوبة: 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$		$+$	

2) حل المتراجحة : $S=\varnothing$

VI. النظمات:

1) طريقة التعويض:

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

2) طريقة التأليفة الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

3) طريقة المحددة :

مثال: طريقة المحددة: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$

الجواب: محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=6\neq 0$ و منه النظمة

تقبل حلا وحيدا: هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12}{6}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{6}{6}=1$ و

منه: $S=\{(2,1)\}$