أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

الدرس السابع :

الاشتقاق

مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ العدد المشتق لدالة في نقطة x_0؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق؛ المستقيم المماس لمنحنى في نقطة؛ ـ المعادلة الديكارتية للمستقيم المماس؛ ـ الاشتقاق على مجال؛ الدالة المشتقة؛ ـ اشتقاق الدوال: $x \to a$ و $x \to ax$ و $x \to x^n$؛ ـ اشتقاق الدوال $f+g$، λf، fg، $\frac{1}{f}$، $\frac{f}{g}$، f^n $(n \in IN^*)$؛ ـ رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطاريف دالة قابلة للاشتقاق على مجال.	ـ التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0؛ ـ اشتقاق الدوال الحدودية والدوال الجذرية. ـ تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ ـ تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ ـ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛ ـ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛	ـ تقبل المبرهنتان المتعلقتان بالرتابة وإشارة المشتقة والعمليات على الدوال المشتقة.

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

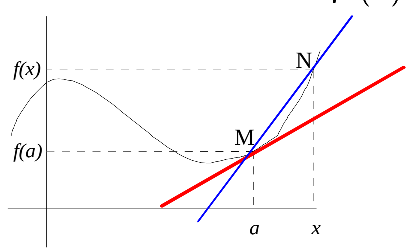
1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l

بحيث : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$



ونكتب : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

الجواب : $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^2-5}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{5(x^2-1^2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 10 = f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0 = 1$

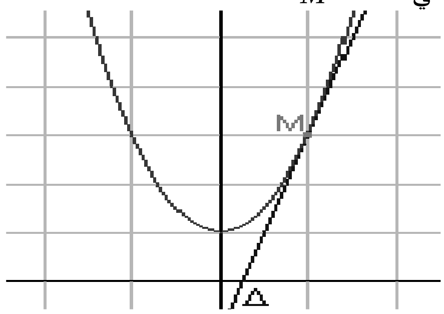
تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 3$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق-معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M



 الأستاذ : عثماني نجيب

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a. معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a; f(a))$ هي :

$$(\Delta) \ : \ y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 3x^2$

حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب: (1 $f(2) = 2^2 - 2\times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$2 = f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

(2 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f(2) + f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = 1 + 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 3$

II.الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ المعرفة كما يلي :

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

III. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

مثال1: $f(x) = 2$ **مثال2:** $f(x) = 3x - 5$

مثال3: $f(x) = x^{10}$ **مثال4:** $f(x) = 2x^5$

مثال5: $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

مثال6: $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

مثال7: $f(x) = x^2 \times \sqrt{x}$

مثال8: $f(x) = (3x-5)\times(2x+1)$

مثال9: $f(x) = \frac{1}{5x-4}$

مثال10: $f(x) = \frac{4x-2}{2x-1}$

مثال11: $f(x) = (2x-1)^7$

الدالة f	الدالة المشتقة f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$
$f(x) = k.u$	$f'(x) = k.u'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + u \times v'$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^n \times u'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

تمرين: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x) = 2$ (2 $f(x) = 3x - 5$ (3 $f(x) = x^{10}$

(4 $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$ (5 $f(x) = \frac{5}{x}$ (6 $f(x) = 6\sqrt{x} - 4$

(7 $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ (8 $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ (9 $f(x) = (3x+4)^3$ (10 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

أجوبة : (1 $f'(x) = (2)' = 0$ (2 $f'(x) = (3x-5)' = 3$

(3 $f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$

(4 $f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4\times 3x^{3-1} - \frac{1}{2}\times 2x - 0 = 12x^2 - x$

(5 $f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5\times\frac{1}{x}\right)' = 5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-5}{x^2}$

(6 $f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$

(7 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(8 $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1\times(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

9) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 12) $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة : 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=(4\sqrt{x}-1)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

12) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f تزايدية على مجال I فان $f'(x)\geq0$ $\forall x\in I$
- إذا كانت f تناقصية على مجال I فان $f'(x)\leq0$ $\forall x\in I$
- إذا كانت f ثابتة على مجال I فان $f'(x)=0$ $\forall x\in I$

خاصية2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة قطعا على المجال I فان f تزايدية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' سالبة قطعا على المجال I فان f تناقصية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' منعدمة على المجال I فان f ثابتة على مجال I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الجواب: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+2x-2)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصر من I

- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرفا في النقطة a فان $f'(a)=0$

خاصية 2:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطراف للدالة f

مثال: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

أو $f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3)أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5)حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6)حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7)حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

الجواب: $f(x)=2x^2+x+1$

1)الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

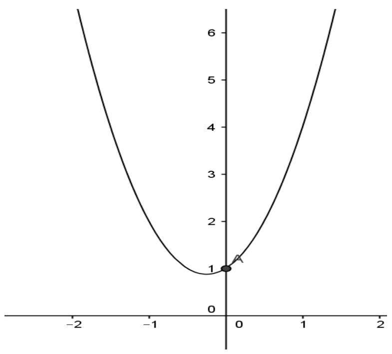
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8)رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني

$-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$