تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 7 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

وليكن (Cf) منحناها في معلم $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

حدد معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0 = 0$.

حل التمرين 1

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى (Cf) في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

لدينا : $f(x) = x^2 - 3x + 1$

ومنه: $f'(x) = 2x - 3$

معادلة (Δ) هي :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

وبما أن : $f(0) = 1$ و $f'(0) = -3$

فإن : $(\Delta): y = -3x + 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

1 – حدد Df مجموعة تعريف f.

2 – أحسب $f'(x)$ لكل x من Df .

3 – حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0=2$.

حل التمرين 2

1 – لنحدد Df .

$$Df = \{x \in IR / x + 2 \neq 0\}$$

ومنه :

$$Df = \{x \in IR / x \neq -2\}$$

$$Df = IR \{-2\}$$

2 – لنحسب $f'(x)$ لكل x من Df .

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x+2) - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1.(x+2) - (x-1).1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

3 – معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0=2$

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16}$$

$$f(2) = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}x - \frac{1}{8}$$

تمرين 3

أحسب مشتقة الدالة العددية f في كل حالة من الحالات التالية :

① $f(x) = x^3 - 3x + 5$

② $f(x) = -4x^2 + x + 13$

③ $f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 1$

④ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$

⑤ $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-1}$

⑥ $f(x) = (x+1)^{2012}$

حل التمرين 3

لنحسب مشتقة الدالة العددية f في كل حالة :

① $f(x) = x^3 - 3x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

② $f(x) = -4x^2 + x + 13$

$f'(x) = -4.2x + 1 = -8x + 1$

③ $f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 3$

④ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x+5) - (2x+1)(x+5)'}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+5) - (2x+1).1}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+10-2x-1}{(x+5)^2} = \frac{9}{(x+5)^2}$$

⑤ $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(1-3x)'(x-1) - (x-3x)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3(x-1) - (1-3x).1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x+3-1+3x}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

⑥ $f(x) = (x+1)^{2012}$

$f'(x) = 2012.(x+1)'(x+1)^{2012-1}$

$f'(x) = 2012(x+1)^{2011}$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 – أ – بين أن لكل x من IR :

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

ب– أدرس إشارة $3x^2 - 2x$

ج – اعط جدول تغيرات f.

حل التمرين 4

1 – لدينا : $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

2 – أ – لدينا :

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

ب – نعتبر المعادلة :

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 16$; $x_1 = 1$ و $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

ومنه إشارة $3x^2 - 2x - 1$ تلخص في الجدول :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		+	0	-	0	+	

ج – جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{59}{27}$	↘	1	↗	$+\infty$