

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الاشتقاق
السنة الأولى من سلك البكالوريا مسك الآداب
والعلوم الانسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

الجواب (1): $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 : \text{منه } f \text{ قابلة للاشتقاق عند } : x_0 = 1$$

$$2 = f'(2) \text{ وهو العدد المشتق عند } x_0 = 2$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

تمرين 4: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

(1) $f(x) = 2$ (2) $f(x) = 3x - 5$ (3) $f(x) = x^{10}$

(4) $f(x) = 2x^5$ (5) $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$

(6) $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

(7) $f(x) = (3x - 5) \times (2x + 1)$

(8) $f(x) = 6\sqrt{x} - 4$ (9) $f(x) = \frac{1}{5x - 4}$

(10) $f(x) = \frac{3x - 2}{2x - 1}$ (11) $f(x) = (2x - 1)^7$

(12) $f(x) = \frac{5}{x}$

الأجوبة:

$$f'(x) = (3x - 5)' = 3 \quad (2) \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = (2x^5)' = 2 \times 5x^{5-1} = 10x^4 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = 12x^2 - x \quad (5)$$

$$f'(x) = (3x^2 - 6x - 1)' = 3 \times 2x^{2-1} - 6 - 0 = 6x - 6 \quad (6)$$

(7) نستخدم القاعدة التالية: $(u + v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((3x - 5) \times (2x + 1))' = (3x - 5)'(2x + 1) + (3x - 5)(2x + 1)'$$

$$f'(x) = 3(2x + 1) + 2(3x - 5) = 6x + 3 + 6x - 10 = 12x - 7$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (8)$$

(9) نستخدم القاعدة التالية: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x + 1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند: $x_0 = 1$

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2 + 1$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 3$

الجواب: $f(3) = 2 \times 3^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 1 - 19}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 3^2)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2(x + 3) = 2(3 + 3) = 12$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند: $x_0 = 3$

$$x_0 = 3 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 12 = f'(3)$$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 3x^2$

(1) باستخدام التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 2$

(2) حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب (1): $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3(x + 2) = 3 \times 4 = 12$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند: $x_0 = 2$

$$x_0 = 2 \text{ وهو العدد المشتق عند } f'(2) = 12$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 12 + 12(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

$$y = 12x - 12 \Leftrightarrow y = 12 + 12x - 24 \Leftrightarrow$$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستخدام التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$: نستعمل القاعدة التالية $f(x) = (3x+4)^3$ (11)

$$f'(x) = ((3x+4)^3)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^{3-1} = 9(3x+4)^2$$

$$f'(x) = \left(\frac{-3}{x}\right)' = \left(-3 \times \frac{1}{x}\right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$$
 (12)

الدالة المشتقة f'	الدالة f
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$n \in \mathbb{Z}^*$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k.u'$	$f(x) = k.u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = nu^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$

تمرين 6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x + 15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (10) \quad f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (9)$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (12) \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (11)$$

$f'(x) = (7x+15)' = 7$ (2) $f'(x) = (11)' = 0$ (1) **الأجوبة:**

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x-4}\right)' = \frac{(5x-4)'}{(5x-4)^2} = \frac{5}{(5x-4)^2}$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$ (10)

$$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{2x-1}\right)' = \frac{(3x-2)'(2x-1) - (3x-2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3(2x-1) - 2 \times (3x-2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-6x+4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$: نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = (2x-1)^7$ (11)

$$f'(x) = ((2x-1)^7)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 7 \times 2 \times (2x-1)^{7-1} = 14(2x-1)^6$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \times \frac{1}{x}\right)' = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-5}{x^2}$$
 (12)

تمرين 5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = x^5 \quad (3) \quad f(x) = 6x + \frac{1}{2} \quad (2) \quad f(x) = 10 \quad (1)$$

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 4 \quad (5) \quad f(x) = 6x^3 \quad (4)$$

$$f(x) = (4x-1) \times (3x+5) \quad (7) \quad f(x) = x^2 - 3x + 8 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (9) \quad f(x) = 2\sqrt{x} + 1 \quad (8)$$

$$f(x) = (3x+4)^3 \quad (11) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{-3}{x} \quad (12)$$

$f'(x) = \left(6x + \frac{1}{2}\right)' = 6$ (2) $f'(x) = (10)' = 0$ (1) **الأجوبة:**

$$f'(x) = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4 \quad (3)$$

$$f'(x) = (6x^3)' = 6 \times 3x^{3-1} = 18x^2 \quad (4)$$

$$f'(x) = (5x^2 - 3x + 4)' = 5 \times 2x^{2-1} - 3 - 0 = 10x - 3 \quad (5)$$

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 8)' = 2x^{2-1} - 3 + 0 = 2x - 3 \quad (6)$$

$(u+v)' = u' \times v + u \times v'$: نستعمل القاعدة التالية : (7)

$$f'(x) = ((4x-1) \times (3x+5))' = (4x-1)'(3x+5) + (4x-1)(3x+5)'$$

$$f'(x) = 4(3x+5) + 3(4x-1) = 12x + 20 + 12x - 3 = 24x + 17$$

$$f'(x) = (2\sqrt{x} + 1)' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad (8)$$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$: نستعمل القاعدة التالية : (9)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{-2}{(2x+1)^2}$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ (10)

4) تلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

تمرين 8: حدد مطايف الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 1)' = 2x - 6 \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R} \quad \text{الجواب:}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x - 6 = 0 \text{ يعني } x = 3$$

ندرس إشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-8	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3) = -8$

مطراف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2 + x + 1$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطايف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

$$\text{الجواب: } f(x) = 2x^2 + x + 1$$

(1) الدالة f محدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 + x + 1)' = 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 4x + 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{4}$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$

(4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \right)' = \frac{1}{5} \times 5x^4 - \frac{1}{4} \times 4x^3 - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x} \right)' = \left(3 \times \frac{1}{x} \right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية:}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x+7} \right)' = \frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = -\frac{5}{(5x+7)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3 + 1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3 + 1) - 7x(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7(x^3 + 1) - 7x \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad (11)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{2x - 1} \right)' = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2(4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = (2x - 1)^7 \quad (12)$$

$$f'(x) = ((2x - 1)^7)' = 7 \times (2x - 1)^{7-1} \times (2x - 1)' = 14(2x - 1)^6$$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أدرس تغيرات f حدد جدول تغيرات f

الأجوبة: (1) الدالة f محدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2.5	$+\infty$

إذا كانت: $x \in [-1; +\infty[$ فان : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايديه

إذا كانت: $x \in]-\infty; -1]$ فان : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(7) حدد مطايف الدالة f ان وجدت
(8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 5x - 21 \Leftrightarrow y = 4 + 5(x - 5) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

لأن: $f(1) = 4$ و $f'(1) = 5$

(6) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $2x^2 + x + 1 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 2 \text{ و } b = 1 \text{ و } c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتالي التمثيل المبياني

لا يقطع محور الأفاصيل

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

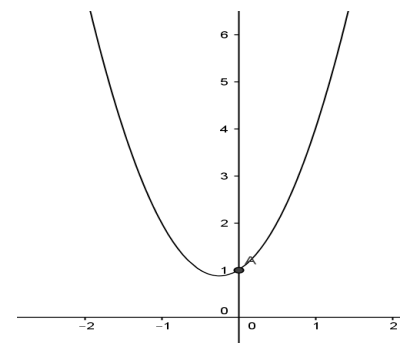
نحسب فقط: $f(0)$

$$f(0) = 1 \text{ ومنه نقطة التقاطع هي: } A(0; 1)$$

(7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي: $\frac{7}{8}$

(8) رسم C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة: بالنسبة لـ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ وتحديد نقط التقاطع

مع محور الأفاصيل نحل المعادلة: $f(x) = 0$ يعني

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = -1 \text{ و } b = 2 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \text{ و } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1; 0)$ أو $B(3; 0)$

تمرين 10: للبحث نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = -x^2 + x \text{ أو } f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محداث D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant
régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un
mathématicien

