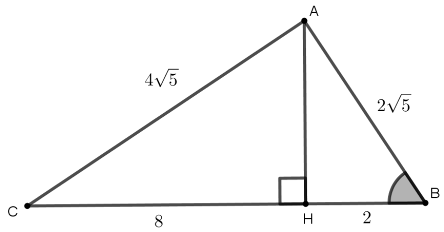
تصحيح الفرض المحروس 3 في مادة الرياضيات الدورة الأولى

أستاذ المادة : يوسف ادحوم

التمرين الأول: 9 نقاط

نعتبر الشكل التالي بحيث : $AB = 2\sqrt{5}$ و $BH = 2$ و $CH = 8$ و $BC = 10$ و $AC = 4\sqrt{5}$



1 أُحسب المسافة AH [2 ن]

2 بين أن المثلث ABC قائم الزاوية. [2 ن]

3 أُحسب النسب المثلثية للزاوية الحادة $A\hat{B}C$ [3 ن]

4 لتكن النقطة L المسقط العمودي للنقطة H على المستقيم (AB).

بين أن : $LH = 2 \times \sin(A\hat{B}H)$ ثم استنتج المسافة LH [2 ن]

الجواب :

1 حساب المسافة AH

لدينا المثلث ABH قائم الزاوية في H وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة،

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ يعني $(2\sqrt{5})^2 = AH^2 + 2^2$ يعني $20 = AH^2 + 4$ إذن $AH^2 = 16$

وبالتالي $\boxed{AH = 4}$

2 لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

لدينا أطوال أضلاع المثلث ABC هي : $AB = 2\sqrt{5}$ و $AC = 4\sqrt{5}$ و $BC = 10$

إذن أطول ضلع هو الضلع $[BC]$ يعني أن $BC^2 = 10^2 = 100$

و لدينا : $AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 80 + 20 = 100$

إذن : $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$ ومنه حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A

3 حساب النسب المثلثية للزاوية الحادة $A\hat{B}C$

$\boxed{\cos(A\hat{B}C) = \frac{AB}{CB} = \frac{2\sqrt{5}}{10}}$ $\boxed{\sin(A\hat{B}C) = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{5}}{10}}$ $\boxed{\tan(A\hat{B}C) = \frac{AC}{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2}$

4 لتكن النقطة L المسقط العمودي للنقطة H على المستقيم (AB).

لنبين أن : $LH = 2 \times \sin(A\hat{B}H)$

لدينا L المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) يعني أن المثلث HLB قائم الزاوية في L

إذن : $\sin(L\hat{B}H) = \frac{LH}{BH} = \frac{LH}{2}$ ومنه : $\boxed{LH = 2 \times \sin(L\hat{B}H)}$ وبما أن : $L\hat{B}H = A\hat{B}H$

فإن : $\sin(L\hat{B}H) = \sin(A\hat{B}H)$ ومنه : $\boxed{LH = 2 \times \sin(A\hat{B}H)}$

- استنتاج المسافة LH

لدينا : $LH = 2 \times \sin(A\hat{B}H)$ وبما أن : $A\hat{B}H = A\hat{B}C$

فإن : $\sin(A\hat{B}H) = \sin(A\hat{B}C)$ ومنه : $LH = 2 \times \sin(A\hat{B}C) = 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

التمرين الثاني : 7 نقاط

1 بسط :

$X = \sin(33°) - \cos(57°) + \tan(20°) \times \tan(70°)$ [1 ن]

$Y = \sin^2(73°) + 2\cos^2(72°) + \sin^2(17°) + 2\cos^2(18°)$ [1 ن]

2 ليكن x قياس زاوية حادة غير منعدمة، بحيث : $\cos(x) = \dfrac{2}{5}$

أُحسب : $\sin(x)$ و $\tan(x)$ [3 ن]

3 ليكن y قياس زاوية حادة غير منعدمة :

بين أن : $\dfrac{[\cos(y) + \sin(y)]^2 - 1}{1 - \cos^2(y)} = \dfrac{2}{\tan(y)}$ [2 ن]

الجواب :

1 التبسيط :

$$X = \sin(33°) - \cos(57°) + \tan(20°) \times \tan(70°)$$
$$X = \sin(33°) - \sin(33°) + \tan(20°) \times \frac{1}{\tan(20°)}$$
$$X = 0 + 1 = 1$$

$$Y = \sin^2(73°) + 2\cos^2(72°) + \sin^2(17°) + 2\cos^2(18°)$$
$$Y = \sin^2(73°) + \sin^2(17°) + 2\cos^2(72°) + 2\cos^2(18°)$$
$$Y = \sin^2(73°) + \cos^2(73°) + 2\cos^2(72°) + 2\sin^2(72°)$$
$$Y = 1 + 2 = 3$$

2 ليكن x قياس زاوية حادة غير منعدمة، بحيث : $\cos(x) = \dfrac{2}{5}$

حساب : $\sin(x)$

لدينا : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ يعني أن : $\sin^2(x) + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 1$ يعني أن : $\sin^2(x) + \dfrac{4}{25} = 1$

يعني أن : $\sin^2(x) = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$ وبما أن : $\sin(x) > 0$ فإن : $\boxed{\sin(x) = \sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}}$

- حساب : $\tan(x)$

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}}$$

3 ليكن y قياس زاوية حادة غير منعدمة :

لنبين أن : $\dfrac{[\cos(y) + \sin(y)]^2 - 1}{1 - \cos^2(y)} = \dfrac{2}{\tan(y)}$

$$\frac{[\cos(y) + \sin(y)]^2 - 1}{1 - \cos^2(y)} = \frac{\cos^2(y) + 2\cos(y)\sin(y) + \sin^2(y) - 1}{\sin^2(y)} = \frac{2\cos(y)\sin(y) + \cos^2(y) + \sin^2(y) - 1}{\sin^2(y)}$$

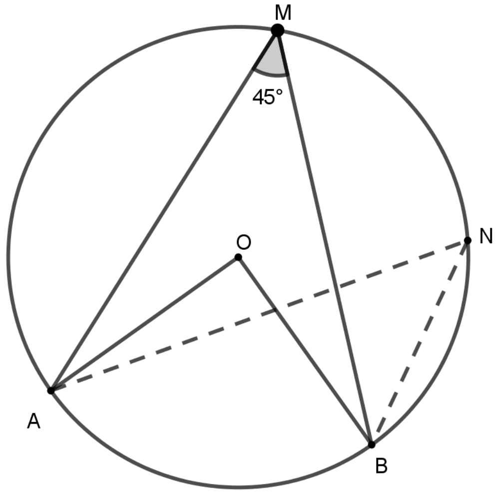
$$= \frac{2\cos(y)\sin(y) + 1 - 1}{\sin^2(y)} = \frac{2\cos(y)\sin(y)}{\sin^2(y)} = \frac{2\cos(y)\sin(y)}{\sin(y)\sin(y)} = \frac{2\cos(y)}{\sin(y)} = \frac{2}{\tan(y)}$$

التمرين الثالث: 4 نقاط

نعتبر الشكل جانبه، بحيث النقطة O مركز الدائرة .

A و M و B نقط من الدئرة بحيث $\widehat{AMB} = 45°$

N نقطة من القوس الصغير $\overset{\frown}{BM}$ (أنظر الشكل)



1 حدد قياس الزاوية $\widehat{ANB}$، معللا جوابك. [1,5 ن]

2 بين أن : $\widehat{AOB} = 90°$ [1,5 ن]

3 استنتج أن المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين. [1 ن]

الجواب :

1 تحديد قياس الزاوية $\widehat{ANB}$

لدينا الزاويتان $\widehat{ANB}$ و $\widehat{AMB}$ محيطيتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$

إذن : $\boxed{\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 45°}$

2 لنبين أن : $\widehat{AOB} = 90°$

لدينا الزاوية المحيطية $\widehat{AMB}$ مرتبطة بالزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ لأنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$

إذن : $\boxed{\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} = 2 \times 45° = 90°}$

3 استنتاج أن المثلث قائم الزاوية و ABM متساوي الساقين.

لدينا : $\widehat{AOB} = 90°$ إذن المثلث AOB قائم الزاوية في O

وبما أن : $OA = OB$ لأن النقطتين A و B تنتميان للدائرة التي مركزها O

فإن المثلث AOB متساوي الساقين في O

وبالتالي المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O