حلول التمارين

الهندسة الفضائية

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:

1) – لنثبت أن المثلث SAC قائم الزاوية.

لدينا : $[SA]$ إرتفاع الهرم $SABCD$.

إذن : (ZA) عمودي على المستوى $(ABCD)$ في النقطة A.

و بما أن : (AC) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : (SA) عمودي على (AC) في النقطة C.

و بالتالي فإن المثلث SAC قائم الزاوية في A.

2) – حساب AC :

لدينا SAC مثلث قائم الزاوية في A ، و حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $SC^2 = AS^2 + AC^2$

أي : $7^2 = 5^2 + AC^2$

$49 = 25 + AC^2$

و منه فإن : $AC^2 = 49 - 25$ أي $AC^2 = 24$

و بما أن : $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{24}\ cm$ أي $\boxed{AC = 2\sqrt{6}\ cm}$.

3) – لنثبت أن : $(SAC) \perp (CD)$.

نعلم أن : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

إذن : $(CD) \parallel (AB)$.

و بما أن : $(AB) \perp (AC)$ (من خلال الشكل) فإن : $(CD) \perp (AC)$.

و نعلم أن : $(ABCD) \perp (SA)$ ، و بما أن : (CD) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $(CD) \perp (SA)$.

لدينا إذن : و $\left.\begin{array}{l}(CD) \perp (AC) \\ (CD) \perp (SA)\end{array}\right\}$ و بما أن : (SA) و (AC) ضمن المستوى (SAC) فإن : $(SAC) \perp (CD)$.

تمرين ②:

1) – لنحسب المسافة الجانبية S_L :

لدينا : $S_L = \pi \times r \times SA$ أي : $S_L = \pi \times 6 \times SA$.

لنحسب : SA.

لدينا $[SO]$ إرتفاع المخروط الدوراني. إذن : $(SO) \perp (OA)$

و منه فإن المثلث SOA قائم الزاوية في O.

و حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $SA^2 = OA^2 + OS^2$

أي :

$$SA^2 = 6^2 + 8^2$$
$$= 36 + 64$$
$$= 100$$

و بما أن : $SA > 0$ فإن : $SA = \sqrt{100}\ cm$ ، أي : $SA = 10\ cm$.

و منه فإن : $S_L = \pi \times 6 \times 10$ و بالتالي فإن : $\boxed{S_L = 60\,\pi\ \ cm^2}$.

2) – حساب V:

لدينا : $V = \frac{1}{3} \times SO \times \pi \times OA^2$ ، أي : $V = \frac{1}{3} \times 8 \times \pi \times 6^2$

و منه فإن : $V = \frac{1}{3} \times 8 \times \pi \times 36$ و بالتالي فإن : $\boxed{V = 96\pi\ cm^3}$.

3) – حساب $\cos S\hat{A}O$:

لدينا : SOA مثلث قائم الزاوية في A .

إذن : $\cos S\hat{A}O = \frac{OA}{SA}$ ، أي : $\cos S\hat{A}O = \frac{6}{10}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\cos S\hat{A}O\ = 0{,}6}$.

تمرين ③ :

1) – لنثبت أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$:

لدينا : الهرم $SEFG$ هو تصغير للهرم $SABC$.

لتكن k نسبة هذا التصغير.

إذن : $SE = k\ SA$ ، أي : $4 = k \times 8$ و منه : $k = \frac{4}{8}$ و بالتالي فإن : $\boxed{k = \frac{1}{2}}$.

إذن : نسبة التصغير هي : $\frac{1}{2}$.

2) – لنحسب EG :

لدينا : $(ABC) // (EFG)$ ، إذن : $(AB) // (EG)$.

نعتبر المثلث : SAB .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} E \in (SA) \\ G \in (SB) \end{array}\right\}$ و بما أن : $(AB) // (EG)$ ، فإن حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SG}{SB} = \frac{EG}{AB}$$

و منه فإن : $\frac{SE}{SA} = \frac{EG}{AB}$ ، أي : $\frac{1}{2} = \frac{EG}{4}$ يعني أن : $EG = \frac{4 \times 1}{2}$.

إذن : $\boxed{EG = 2\ cm}$

3) – أ) -- لنبين أن مساحة المثلث ABC هي : $S_{ABC}=6\,cm^2$.

لدينا من خلال الشكل المثلث ABC قائم الزاوية في B .

إذن : $S_{ABC}=\dfrac{AB\times BC}{2}$ ، أي : $S_{ABC}=\dfrac{4\times 3}{2}=\dfrac{12}{2}=6\,cm^2$ ، إذن : $\boxed{S_{ABC}=6\,cm^2}$.

ب) -- لنستنتج S_{EFG} مساحة المثلث EFG .

بما أن الهرم $SEFG$ هو تصغير للهرم $SABC$ بنسبة $\dfrac{1}{2}$ فإن : $S_{EFG}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times S_{ABC}$

أي : $S_{EFG}=\dfrac{1}{4}\times 6$ و بالتالي فإن : $\boxed{S_{EFG}=1,5\,cm^2}$.

4) – أ) -- لنبين أن حجم الهرم $SABC$ هو : $V=20\,cm^3$.

لدينا : $V=\dfrac{1}{3}\times S_{ABC}\times SB$ أي : $V=\dfrac{1}{3}\times 6\times 10$ و منه فإن : $V=\dfrac{60}{3}=20\,cm^3$.

إذن : $\boxed{V=20\,cm^2}$.

ب) -- لنحسب V' حجم الهرم $SEFG$.

بما أن الهرم $SEFG$ هو تصغير للهرم $SABC$ بنسبة $\dfrac{1}{2}$ فإن : $V'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times V$

أي : $V'=\dfrac{1}{8}\times 20$ و بالتالي فإن : $\boxed{V'=2,5\,cm^3}$.

تمرين ④ :

1) – أ) -- لنبين أن المستقيم (CN) عمودي على المستوى (ABC) :

لدينا : $CDHG$ مربع ، إذن : $(DC)\perp(CG)$ ، و منه فإن : $(DC)\perp(CN)$.

و لدينا : $BCGE$ مربع ، إذن : $(BC)\perp(GC)$ ، و منه فإن : $(BC)\perp(CN)$.

و بما أن : (BC) و (DC) ضمن المستوى (ABC) فإن : $\boxed{(ABC)\perp(CN)}$.

ب) -- لنبين أن حجم الهرم $NABC$ هو : $V=81\,cm^3$.

لدينا : $V=\dfrac{1}{3}\times S_{ABC}\times NC$ أي : $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{AB\times BC}{2}\times NC$ و منه فإن : $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\times 9}{2}\times 6$

إذن : $V=\dfrac{81\times 6}{6}$ و بالتالي فإن : $\boxed{V=81\,cm^3}$.

2) – أ) -- لنتحقق من أن نسبة التصغير هي : $\dfrac{1}{3}$

لدينا الهرم $NIJG$ تصغير للهرم $NABC$. لتكن k نسبة هذا التصغير.

إذن : $V'=k^3V$ ، أي : $3=k^3\times 81$ و منه فإن : $k^3=\dfrac{3}{81}=\dfrac{1}{27}$ ، يعني أن : $k^3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

و بالتالي فإن : $\boxed{k=\dfrac{1}{3}}$.

إذن : نسبة التصغير هي : $\dfrac{1}{3}$.

ب) - - حساب S_{IJG} مساحة المثلث IJG :

نعلم أن الهرم $NIJG$ تصغير للهرم $NABC$ بنسبة $\frac{1}{3}$.

إذن : $S_{IJG} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times S_{ABC}$ ، و منه فإن : $S_{IJG} = \frac{1}{9} \times \frac{AB \times AC}{2}$

أي : $S_{IJG} = \frac{1}{9} \times \frac{9 \times 9}{2}$ و منه فإن : $S_{IJG} = \frac{9}{2}$ و بالتالي فإن : $\boxed{S_{IJG} = 4{,}5\ cm^2}$.

تمرين ⑤ :

1) – حساب V حجم الهرم $SABCD$.

لدينا : $V = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times SA$ ، إذن : $V = \frac{1}{3} \times AB \times AD \times SA$ ، أي : $V = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 5$

و بالتالي فإن : $\boxed{V = 20\ cm^3}$.

2) – لنبين أن : $(AC) \perp (SA)$:

لدينا : $\overrightarrow{SA}$ إرتفاع الهرم $SABCD$.

إذن : $(ABCD) \perp (SA)$.

و بما أن : (AC) ضمن المستوى $(ABCD)$ فإن : $\boxed{(SA) \perp (AC)}$.

3) – لنبين أن : $SC = 5\sqrt{2}\ cm$.

نعلم أن $(SA) \perp (AC)$.

إذن المثلث SAC قائم الزاوية في A ، و حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $SC^2 = AS^2 + AC^2$

أي : $SC^2 = 5^2 + AC^2$

*/ لنحسب AC :

لدينا : $ABCD$ مستطيل ، إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في B .

و حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ، أي : $AC^2 = 4^2 + 3^2$

و منه فإن : $AC^2 = 25$ ، و بما أن $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{25}\ cm$ ، أي : $\boxed{AC = 5\ cm}$.

و منه فإن : $SC^2 = 5^2 + 5^2$ ، أي : $SC^2 = 50$ ، و بما أن : $SC > 0$ فإن : $SC = \sqrt{50}\ cm$

و بالتالي فإن : $SC = 5\sqrt{2}\ cm$.

4) – (أ) -- لنحدد نسبة التصغير :

لدينا : الهرم $SEFGH$ تصغير للهرم $SABCD$. لتكن k نسبة هذا التصغير.

إذن : $S_{EFGH} = k^2 \times S_{ABCD}$ ، و منه : $3 = k^2 \times AB \times AD$ ، أي : $3 = k^2 \times 4 \times 3$

إذن : $3 = 12\,k^2$ و منه ، فإن : $k^2 = \frac{3}{12}$ ، أي : $k^2 = \frac{1}{4}$

و بما أن $k > 0$ فإن : $\boxed{k = \frac{1}{2}}$.

إذن نسبة هذا التصغير هي : $\frac{1}{2}$.

ب) -- لنستنتج حساب SG :

نعلم أن : : إهرم $SEFGH$ تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $\frac{1}{2}$.

إذن : $SG = \frac{1}{2} \times SC$ ، أي : $SG = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2}$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{SG = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ cm}$.

د) -- حساب CG :

لدينا : $CG = SC - SG$ ، أي : $CG = 5\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}$

و منه فإن : $CG = \frac{10\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{CG = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ cm}$.