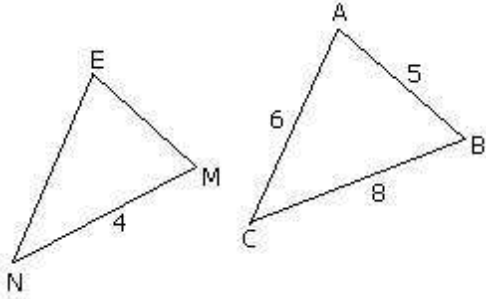


حلول تمارين المثلثات المتشابهة



(1) أ) مثلثان متشابهان ABC و MEN

[AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [NE] ومنه نستنتج أن الضلع [BC] متناظر مع الضلع [MN].

الزوايا المتناظرة هي الزوايا المحصورة بين ضلعين متناظرين.

الزاوية [BAC] متناظرة مع الزاوية [MEN]

والزاوية [ABC] متناظرة مع الزاوية [EMN]

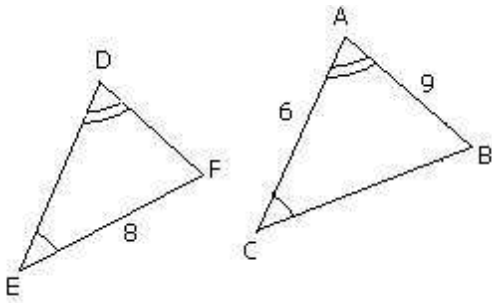
والزاوية [ACB] متناظرة مع الزاوية [ENM]

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة يعني $\frac{AB}{EM} = \frac{AC}{EN} = \frac{BC}{MN}$

ولدينا AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4

إذن $\frac{5}{EM} = \frac{6}{EN} = \frac{8}{4} = 2$ أي $\frac{5}{EM} = 2$ و $\frac{6}{EN} = 2$

وبالتالي $EM = \frac{5}{2}$ و $EN = 3$



(2) $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{C}$ و المثلثان ABC و DEF متشابهان

إذن $[\hat{A}]$ و $[\hat{C}]$ متناظرتان على التوالي مع الزاويتين $[\hat{D}]$ و $[\hat{E}]$

و بالتالي الزاوية $[\hat{B}]$ متناظرة مع الزاوية $[\hat{F}]$

ولدينا الأضلاع المتناظرة هي الأضلاع المحصورة بين زوايا متناظرة أي [AB] و [AC] و [BC] متناظرة على التوالي مع [DE] و [DF] و [EF]

و بالتالي $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ وبما أن: AB=9 و AC=6 و EF=8

فإن: $\frac{9}{DF} = \frac{6}{DE} = \frac{BC}{8} = \frac{2}{3}$

أي $\frac{BC}{8} = \frac{2}{3}$ و $\frac{6}{DE} = \frac{2}{3}$ و $\frac{9}{DF} = \frac{2}{3}$

أي $BC = \frac{16}{3}$ و $DE=9$ و $DF = \frac{27}{2}$

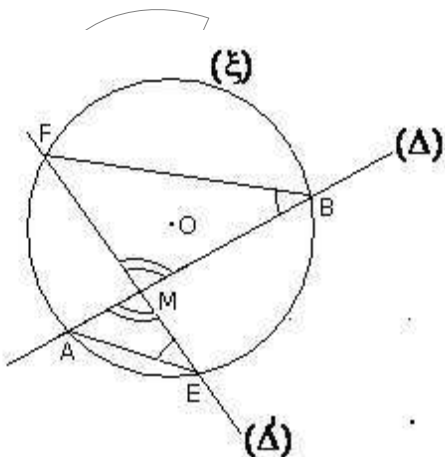
(3) أ) لدينا الزاويتان $[\hat{AME}]$ و $[\hat{FMB}]$ متقابلتان بالرأس M

إذن فهما متقايستان أي $\hat{AME} = \hat{FMB}$

و الزاويتان $[\hat{MEA}]$ و $[\hat{FBM}]$ محيطيتان في الدائرة (ξ) و تحصران

نفس القوس [AF]

إذن فهما متقايستان أي $\hat{MEA} = \hat{FBM}$



و بالتالي فالمثلث MAE و MBF متشابهان.
(حسب الحالة 1)

(ب) من أ) نستنتج أن الزوايا $[A\hat{M}E]$ و $[M\hat{A}E]$ و $[A\hat{E}M]$ (في المثلث AME)
متناظرة على التوالي مع الزوايا $[F\hat{M}B]$ و $[M\hat{F}B]$ و $[M\hat{B}F]$ (في المثلث FMB)
و بالتالي الأضلاع $[AM]$ و $[AE]$ و $[ME]$ متناظرة على التوالي مع الأضلاع $[FM]$ و $[BF]$ و $[MB]$

$$\text{و منه } \frac{AM}{FM} = \frac{AE}{BF} = \frac{ME}{MB}$$

$$\text{و منه } \frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MB}$$

أي $MA \times MB = ME \times MF$ (1)

نفترض حالة $M \in [OE]$ (أنظر الشكل)

$$\text{أي } ME = OE - OM$$

$$\text{و } MF = OF + OM$$

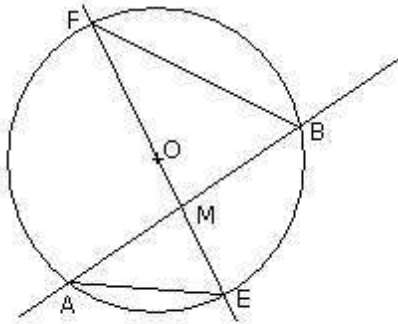
و لدينا $OE = OF = r$ (لأن $E \in (\xi)$ و $F \in (\xi)$)

$$\text{و بالتالي } ME \times MF = (OE - OM)(OF + OM) = (r - OM)(r + OM)$$

أي (2) $ME \times MF = r^2 - OM^2$

و من (1) و (2) نستنتج أن $ME \times MF = r^2 - OM^2$

و نبين نفس النتيجة في حالة $M \in [OF]$



(4) نعتبر المثلثين ABB' و ACC' (وذلك انطلاقا من الأطوال التي تتضمنها المتساوية $AC' \times AB = AB' \times AC$)

لدينا $[B\hat{A}C]$ زاوية مشتركة بين المثلثين

و $AB'B = AC'C$ (زاويتان قائمتان)

إذن المثلثان ABB' و ACC' متشابهان (حسب الحالة 1)

و منه أطوال الأضلاع المتناظرة (المرتبطة بالزوايا المتناظرة) متناسبة أي:
الضلعين $[AB]$ و $[AB']$ المتناظرين مع الضلعين $[AC]$ و $[AC']$ على التوالي متناسبة:

$$\text{و منه } \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{و منه } AC' \times AB = AB' \times AC$$

(5) $AB = 2BC$

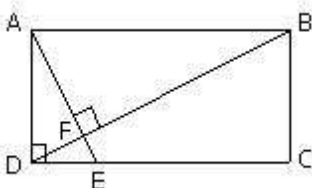
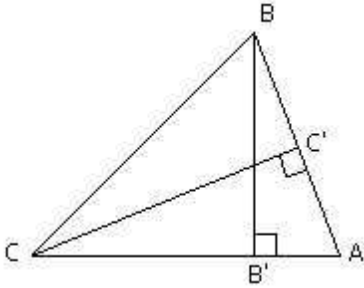
أ) نبين أن المثلثين BCD و ADE متشابهان

لدينا $\hat{B}CD = \hat{A}DE = 90^\circ$ أي $\hat{B}CD = \hat{A}DE = 90^\circ$ (1)

نسمي F نقطة تقاطع (AE) و (BD)

المثلث DEF قائم الزاوية في F لأن (AF) و (DF) متعامدان

و منه الزاويتان $[B\hat{D}C]$ و $[F\hat{E}D]$ متتامتان (2)



و في المثلث BCD القائم الزاوية في C لدينا :

الزاويتان $[D\hat{B}C]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (3)

و من (2) و (3) نستنتج أن الزاويتين $[F\hat{E}D]$ و $[D\hat{B}C]$ متفايستتان أي $D\hat{B}C = F\hat{E}D$ (4)
و من (1) و (4) نستنتج أن المثلثين ADE و BCD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الأضلاع $[AD]$ و $[AE]$ و $[DE]$ (في المثلث ADE)
متناظرة مع الأضلاع $[DC]$ و $[BD]$ و $[BC]$ (في المثلث BCD) على التوالي

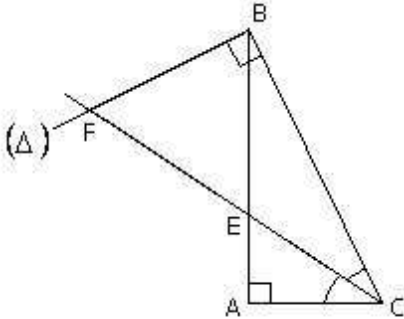
و بالتالي فهي متناسبة أي : $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{DC}$

و لدينا $AD=BC$ و $DC=AB$ لأن ABCD مستطيل

و $AB=2BC$ حسب المعطيات أي $BC = \frac{1}{2}AB$

$$DE = BC \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}AB \right) = \frac{1}{4}AB \text{ أي}$$

$$DE = \frac{1}{4}CD \quad \text{إذن} \quad \mathbf{AB=CD} \quad \text{ولدينا}$$



6 (2 أ) نبين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان

لدينا $A\hat{C}E = B\hat{C}F$ (1) لأن [CE] منصف الزاوية $[A\hat{C}B]$

و $C\hat{A}E = C\hat{B}F$ أي $C\hat{B}F = 90^\circ$ $C\hat{A}E = 90^\circ$ (2)

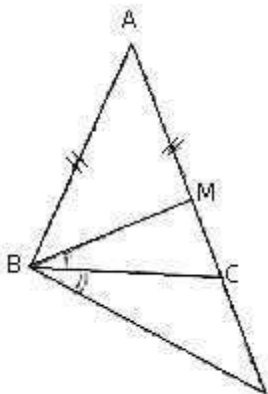
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AEC و BFC متشابهان (حسب الحالة 1)

ب (من أ) نستنتج أن الأضلاع $[AE]$ و $[AC]$ و $[EC]$ (في المثلث AEC)

متناظرة مع الأضلاع $[BF]$ و $[BC]$ و $[FC]$ (في المثلث BFC)

و بالتالي فأطوالها متناسبة أي : $\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FC}$

و منه $AE \times FC = EC \times BF$



7 (أ) نقارن الزاويتين $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{B}N]$

لدينا $A\hat{B}N = A\hat{B}C + N\hat{B}C$ (1) (انظر الشكل)

و في المثلث MBC الزاوية $[A\hat{M}B]$ خارجية

ومنه $A\hat{M}B = M\hat{B}C + M\hat{C}B$

و لدينا $M\hat{C}B = A\hat{C}B$ (انظر الشكل)

و $\widehat{MBC} = \widehat{NBC}$ (حسب المعطيات)

$$\text{إذن (2) } \widehat{AMB} = \widehat{ACB} + \widehat{NBC} \\ = \widehat{ABC} + \widehat{NBC}$$

(لدينا $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A)

من (1) و (2) نستنتج أن $\widehat{ABN} = \widehat{AMB}$

ب (نقارن المثلثين AMB و ABN و نستنتج أن $AB^2 = AM \times AN$)

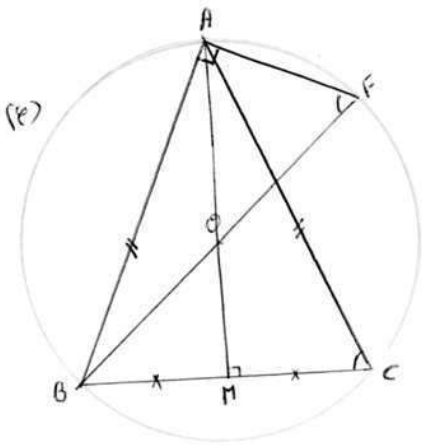
لدينا $\widehat{ABN} = \widehat{AMB}$ (حسب أ) و الزاوية $[\widehat{BAN}]$ مشتركة

إذن المثلثان AMB و ABN متشابهان (حسب الحالة 1)

و بالتالي أطوال الأضلاع $[AB]$ و $[AN]$ (في المثلث ABN) المتناظرة

مع أطوال الأضلاع $[AM]$ و $[AB]$ (في المثلث AMB) على التوالي متناسبة

$$\text{و منه } \frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AB} \text{ أي } AB^2 = AM \times AN$$



(8 أ) نبين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان
لدينا M منتصف $[BC]$ أي (AM) متوسط في المثلث ABC المتساوي

الساقين في A إذن (AM) هو كذلك واسط $[BC]$ أي $\widehat{AMC} = 90^\circ$

و لدينا $\widehat{BAF} = 90^\circ$ لأن $[BF]$ قطر في (O, R)

أي المثلث ABF قائم الزاوية في A

$$\text{إذن (1) } \widehat{AMC} = \widehat{BAF}$$

و الزاويتان $[\widehat{BCA}]$ و $[\widehat{AFB}]$ محيطيتان في الدائرة (O, R) و تحصران

نفس القوس $[AB]$

$$\text{إذن (2) } \widehat{BCA} = \widehat{AFB}$$

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AFB و MCA متشابهان (حسب الحالة 1)
ب (من أ) نستنتج أن الضلعين $[AB]$ و $[AF]$ (في المثلث AFB) متناظرتان على التوالي

مع الضلعين $[AM]$ و $[MC]$ (في المثلث MCA)

$$\text{و بالتالي أطوالها متناسبة أي } \frac{AB}{AM} = \frac{AF}{MC}$$

$$\text{أي } AB \times MC = AF \times AM$$

(9) نقارن المثلثين ABH و ACD :

لدينا $[AC]$ قطر في الدائرة (ξ) و $D \in (\xi)$

$$\text{إذن } \widehat{ADC} = 90^\circ$$

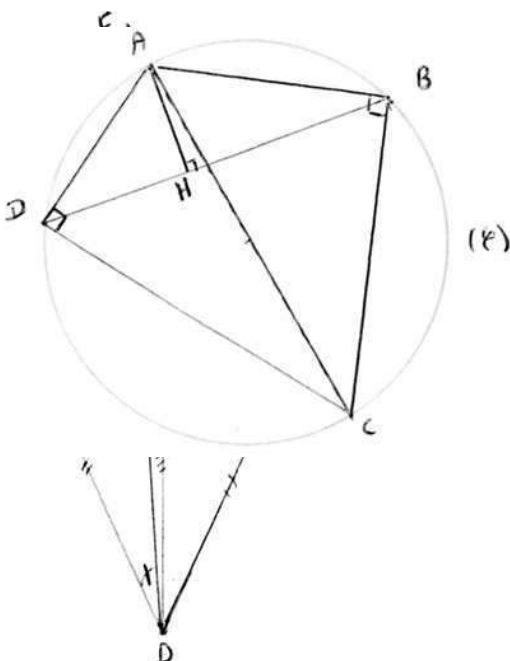
$$\text{ولدينا (1) } \widehat{AHB} = 90^\circ$$

و الزاويتان $[\widehat{ABH}]$ و $[\widehat{ACD}]$ محيطيتان في الدائرة (ξ)

و تحصران نفس القوس $[AD]$

$$\text{و منه (2) } \widehat{ABH} = \widehat{ACD}$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABH و ACD متشابهان



(حسب حالة 1)

و بالتالي الضلعان [AB] و [AH] (في المثلث ABH) المتناظران على التوالي مع الضلعين [AC] و [AD] متناسبة

$$\text{أي } \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AD} \text{ أي } AB \times AD = AC \times AH$$

10 (أ) نعتبر النقطة I منتصف [BC]

لدينا إذن I منتصف [AD] (لأن ABC متساوي الأضلاع أي (AI) محور تماثل للمثلث ABC)
إذن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع و هو معين.

و بالتالي $\hat{E}BD = \hat{A}CD$ (1)

و لدينا $(AC) \parallel (BD)$ و (EF) قاطع

و بالتالي الزاويتان $[CFD]$ و $[BDE]$ المتبادلتان داخليا متقايستان أي : $BDE = CFD$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين BDE و CFD متشابهان (حسب الحالة 1)

(ب من أ) نستنتج أن الضلعين [BD] و [BF]

(في المثلث ADE) متناظران على التوالي مع الضلعين [CF] و [CD] (في المثلث CFD)

$$\text{و بالتالي } \frac{BD}{CF} = \frac{BE}{CD}$$

أي $BE \times CF = CD \times BD$ و $CD \times BD$ ثابت (أي غير مرتبط ب E)
و بالتالي يضل الجداء $BE \times CF$ الجداء ثابتا عندما تتغير E على [AB]

11 نفترض

(أ) نقارن المثلثين MAC و MBC

لدينا الزاوية $[AMC]$ مشتركة بين المثلثين (1)

و لدينا $MA \times MB = MC^2$

$$\text{أي } (2) \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين MAC و MBC متشابهان)

(حسب الحالة 2)

وبما أن الضلعان [MA] و [MC]

(في المثلث MAC) متناظرة على التوالي مع الضلعين [MC] و

[MB] (في المثلث MCB) فإن الزاويتين $[AMC]$ و $[MBC]$

المحاذيتين لكل من الضلعين متناظرتين وبالتالي متقايستان

(لأن $[MBC] = [AMC]$)

$$\text{أي } \hat{AMC} = \hat{MBC}$$

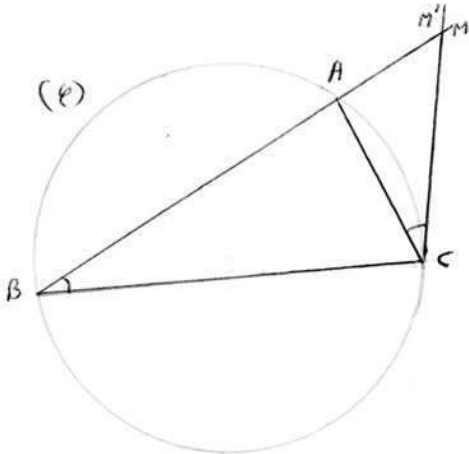
(ب) في الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC

الزاوية $[AMC]$ محيطة في الدائرة (ξ) و تحصر القوس [AC]

و إذا افترضنا نقطة M' من [BA] بحيث يكون (CM') مماسا للدائرة (ξ) في C فيكون لدينا $[AM'C]$ محيطة في

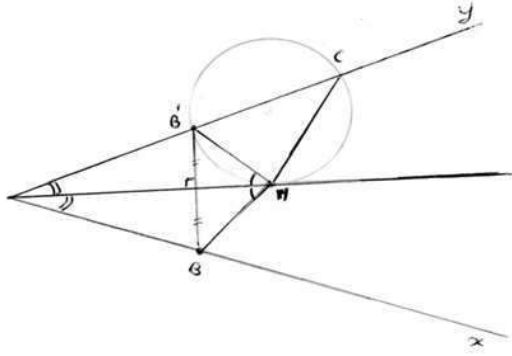
(ξ) و تحصر نفس القوس [AC]

$$\text{و بالتالي } \hat{AMC} = \hat{AM'C}$$



و حسب أ) $\widehat{ABC} = \widehat{ACM}$
و بالتالي $\widehat{ACM} = \widehat{ACM'}$ أي أن $M'=M$

و بالتالي المستقيم (CM) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC في النقطة C



$$AC = \frac{4}{3} AM \text{ و } AB = \frac{3}{4} AM \quad (12)$$

أ) نقارن المثلثين AMC و ABM

لدينا $\widehat{MAC} = \widehat{MAB}$ (لأن (AM) منصف للزاوية $[x\hat{A}y]$ (1)

$$AC = \frac{4}{3} AM \text{ و } AB = \frac{3}{4} AM$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{4}{3} \text{ و } \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4} \text{ أي}$$

$$(2) \frac{AM}{AC} = \frac{3}{4} \text{ و } \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4} \text{ أي}$$

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AMC و ABM متشابهان (حسب الحالة 2)

ب) بالتماثل المحوري الذي محوره (AM) $S_{(AM)}$

$$S_{(AM)} : A \rightarrow A$$

$$S_{(AM)} : B \rightarrow B'$$

$$[A\hat{M}B] \rightarrow [A\hat{M}B'] \text{ أي}$$

و بالتالي (3) $\widehat{AMB} = \widehat{AMB}'$

ومن أ) نستنتج أن الزاوية $[A\hat{M}B]$ (في المثلث ABM) متناظرة مع الزاوية $[A\hat{C}M]$ (في المثلث AMC)

$$(4) \widehat{AMB} = \widehat{ACM}$$

ومن (3) و (4) نستنتج أن $\widehat{AMB}' = \widehat{ACM}$

ومثل السؤال ب) من التمرين 11)

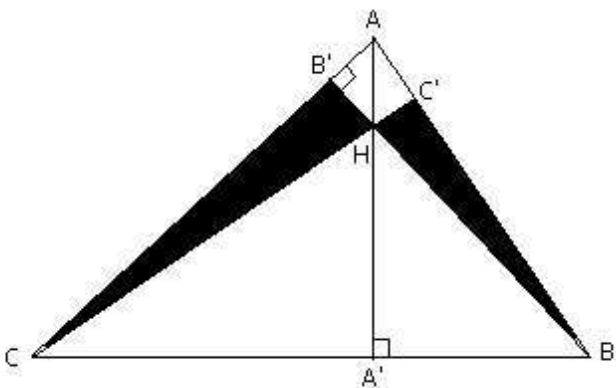
نستنتج أن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[A\hat{M}B']$ محيطيتان في

(ξ) و تحصران نفس القوس $[B'M]$ و أ، المستقيم (AM)

مماس للدائرة (ξ) في M

13) نثبت أن $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

نعتبر المثلثين AHB' و BHA'



لدينا $\widehat{A'B'H} = \widehat{B'A'H} = 90^\circ$

و $\widehat{A'HB'} = \widehat{B'HA'}$ (لأن الزاويتين $[\widehat{A'HB'}]$ و $[\widehat{B'HA'}]$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثان $A'HB'$ و $B'HA'$ متشابهان

و منه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}$$

و منه $HA \times HA' = HB \times HB'$ (1)

نعتبر كذلك المثلثين CHB' و BHC'

لدينا $\widehat{HB'C} = \widehat{HC'B} = 90^\circ$

و $\widehat{B'HC} = \widehat{B'HC}$ (لأن الزاويتين $[\widehat{B'HC}']$ و $[\widehat{B'HC}]$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثين CHB' و BHC' متشابهان ومنه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC'}{HB'}$$

و منه $HB \times HB' = HC \times HC'$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن :

$$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$$