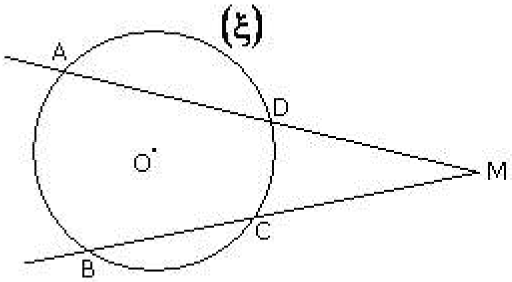



# حلول التمارين

**1 )** الزوايا المحيطية

$[D\hat{B}F]$ , $[D\hat{A}F]$ , $[A\hat{B}D]$ , $[B\hat{A}C]$

**2 )** $A\hat{F}B = A\hat{E}B = 65°$ محيطيتان في الدائرة (ع) و تحصران نفس القوس

الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{E}B]$

إذن $A\hat{O}B = 2A\hat{E}B$ و لدينا $A\hat{E}B = 65°$ إذن $A\hat{O}B = 130°$

الزاوية $[A\hat{G}B]$ و $[A\hat{E}B]$ محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما G و E لا ينتميان إلى نفس القوس إذن فهما متكاملتين

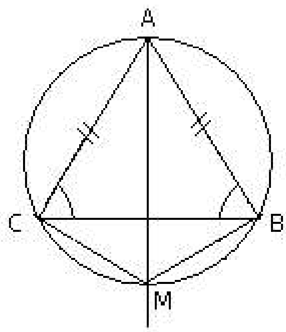
و منه $A\hat{G}B + A\hat{E}B = 180°$

أي $A\hat{G}B = 180° - A\hat{E}B$

أي $A\hat{G}B = 180° - 65°$

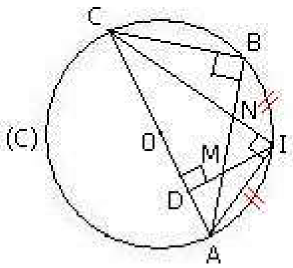
أي $A\hat{G}B = 115°$

**3 )**




الزاويتان $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان

**9 )**




ليكن D المسقط العمودي للنقطة I على المستقيم (AC)

المثلث DCI قائم الزاوية في D لأن (DC) و (ID) متعامدان

المثلث INA قائم الزاوية في I لأن [AC] قطر في (ع)

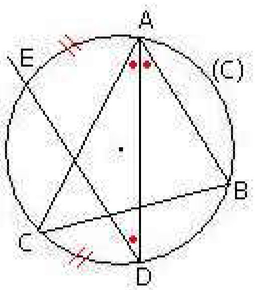
الزاويتان $[N\hat{C}A]$ و $[N\hat{A}I]$ محيطيتان وتحصران قوسين متقايسين [AI] و [IB] إذن فهما متقايستان

و بالتالي تكون متممتاهما $[M\hat{I}N]$ $[M\hat{N}I]$ على التوالي متقايستان أيضا و بالتالي فإن المثلث MIN متساوي الساقين في M و منه IM=MN (1)

و بالمثل نبين أن المثلث MIA متساوي الساقين في M ومنه IM=AM (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن IM=AM=MN

**10 )**

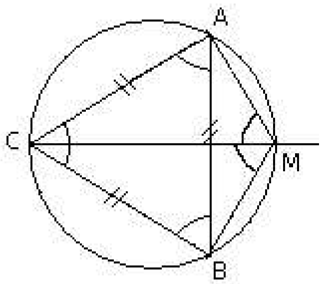



نصف المستقيم [AD) منصف للزاوية $[C\hat{A}B]$ إذن الزاويتان $[C\hat{A}D]$ و $[D\hat{A}B]$ متقايستان.

الزاويتان $[A\hat{D}E]$ و $[D\hat{A}B]$

$[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]
إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B$ **(1)**
الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]
إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$ **(2)**
و لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ **(3)** لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A
و من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A\hat{M}B = A\hat{M}C$
و بالتالي [MA] هو منصف الزاوية $[B\hat{M}C]$.

**4 )**

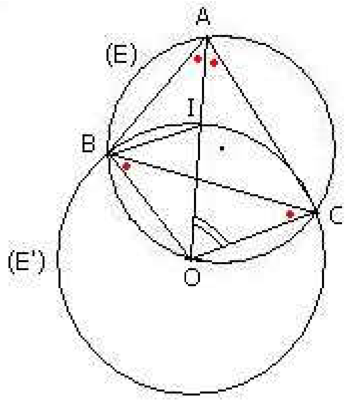



الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]
إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$
لدينا $A\hat{B}C = 60°$
لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
إذن $A\hat{M}C = 60°$
الزاويتان $[C\hat{M}B]$ و $[B\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]
إذن $C\hat{M}B = B\hat{A}C$
لدينا $B\hat{A}C = 60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
إذن $C\hat{M}B = 60°$
الزاويتان $[A\hat{M}C]$ و $[C\hat{M}B]$ متحاديتان و منه
$A\hat{M}B = C\hat{M}B + A\hat{M}C$
$= 60° + 60°$
أي $A\hat{M}B = 120$

<u>ملاحظة :</u>
يمكن إيجاد قياس الزاوية $[A\hat{M}B]$ بملاحظة أنها و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما M و C لا ينتميان إلى نفس القوس ، إذن $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ متكاملتان،
أي $A\hat{M}B + A\hat{C}B = 180°$ و $A\hat{C}B = 60°$
إذن $A\hat{M}B = 120°$

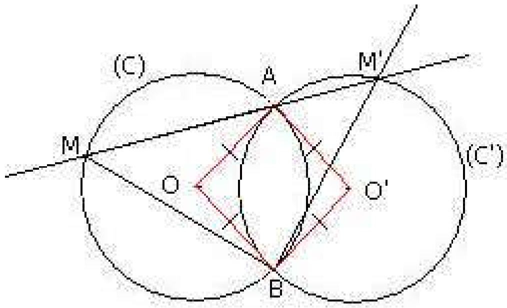
متقايستان لأنهما متبادلتان داخليا
و لأن (DE) و (AB) متوازيان و (AD) قاطع لهما.
إذن الزاويتان المحيطيتان $[C\hat{A}D]$ و $[A\hat{D}E]$ متقايستان.
إذن فإنهما تحصران قوسين متقايسين [CD] و [AE]
و بالتالي وترين متقايسين
أي أن CD=AE

**11 )**




لتكن (E') الدائرة التي مركزها هو O وشعاعها هو OB.
الزاويتان $[O\hat{A}B]$ و $[O\hat{C}B]$ متقايستان لأنهما محيطيتان في الدائرة (E)، وتحصران نفس القوس $[OB]$.
لدينا إذن :
$O\hat{A}B = O\hat{C}B$
الزاويتان $[O\hat{A}C]$ و $[O\hat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة (E) و تحصران نفس القوس $[OC]$، فهما متقايستان.
لدينا إذن : $O\hat{A}C = O\hat{B}C$
وحيث أن : $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ فإن : $O\hat{C}B = O\hat{B}C$.
ومنه نستنتج أن المثلث OBC متساوي الساقين وأن : $OB = OC$
وهذا يدل على أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (E') .
الزاوية $[I\hat{B}C]$ محيطية في الدائرة (E') والزاوية المركزية المرتبطة بها هي $[I\hat{O}C]$،
وبالتالي فإن $I\hat{B}C = \frac{1}{2} I\hat{O}C$.
الزاويتان $[I\hat{O}C]$ ( أو $[A\hat{O}C]$ ) و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة (E) وتحصران نفس القوس $[AC]$، وبالتالي فإن : $I\hat{O}C = A\hat{B}C$ . تستنتج إذن أن : $I\hat{B}C = \frac{1}{2} A\hat{B}C$.
أي أن $(BI]$ منصف للزاوية $[A\hat{B}C]$ وحيث أن $(AI]$ منصف للزاوية $[C\hat{A}B]$. فإن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث $ABC$.

**( 5**




أ )لدينا OA=OB =O'A= O'B لأن للدائرتين (ع) و (ع') نفس الشعاع r و $A\in$(ع) و $B\in$(ع) و $A\in$(ع') و $B\in$(ع')

إذن AOBO' معين

ب ) الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ في الدائرة (ع)

إذن $A\hat{M}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$ (1)

الزاوية $[A\hat{O}'B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}'B]$ في الدائرة (ع')

إذن $A\hat{M}'B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (2)

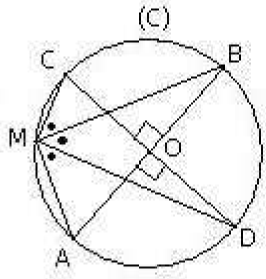
و بما أن AOBO' معين فإن $A\hat{O}B=A\hat{O}'B$ لأن الزاويتين $[A\hat{O}B]$ و $[A\hat{O}'B]$ متقابلتان في المعين AOBO'

و منه $\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (3)

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج ان $A\hat{M}B=A\hat{M}'B$

و بالتالي المثلث MBM' متساوي الساقين في B

**( 6**




الزاوية $[A\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}D]$ و

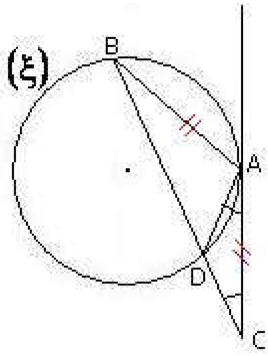
لدينا $A\hat{O}D=90°$ لأن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان في O

و منه $A\hat{M}D=\frac{1}{2}\times 90°$

أي $A\hat{M}D=45°$

الزاوية $[C\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ و لدينا $C\hat{O}B=90°$

**( 12**




الزاوية $[C\hat{A}D]$ محيطية في الدائرة (ع) وتحصر القوس [AD]

و الزاوية $[A\hat{B}D]$ محيطية في الدائرة (ع) و تحصر نفس القوس [AD]

إذن $A\hat{B}D=C\hat{A}D$ (1)

و لدينا AB=AC

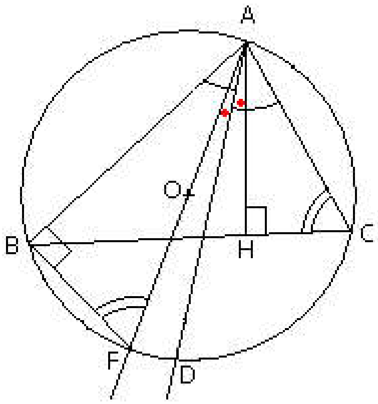
إذن المثلث ABC متساوي الساقين في A

و بالتالي $A\hat{B}D=A\hat{C}D$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{C}D=C\hat{A}D$

و بالتالي ADC مثلث متساوي الساقين في D

**( 13**




نعتبر النقطة F المقابلة قطريا بالنقطة A أي [AF] قطر في (ع)

المثلث BAF قائم الزاوية في B و بالتالي فإن الزاوية $[O\hat{A}B]$ تتمم الزاوية $[A\hat{F}B]$ .

أي $O\hat{A}B+A\hat{F}B=90°$

و كذلك الزاوية $[H\hat{A}C]$ تتمم الزاوية $[A\hat{C}B]$ في المثلث القائم الزاوية AHC

أي $H\hat{A}C+A\hat{C}B=90°$

الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB] فهما إذن زاويتان متقايستان و بالتالي فإن متمميهما $[O\hat{A}B]$ و $[H\hat{A}C]$ متقايستان أي : $O\hat{A}B=H\hat{A}C$ (1)

و بما أن (AD) منصف للزاوية $[B\hat{A}C]$ فإن $B\hat{A}D=C\hat{A}D$ (2)

و نستنتج من (1) و (2) أن :

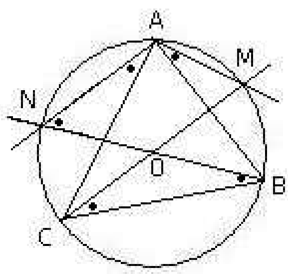
$B\hat{A}D-O\hat{A}B=C\hat{A}D-H\hat{A}C$ (2)-(1)

إذن : $O\hat{A}D=D\hat{A}H$

و بالتالي فإن (AD) منصف كذلك للزاوية $[O\hat{A}H]$.

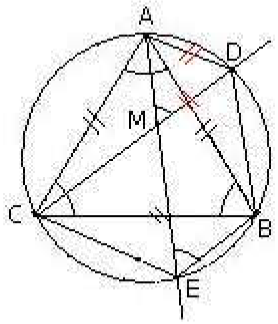
بالزاوية المحيطية $[C\widehat{M}B]$ و لدينا $C\widehat{O}B = 90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OC) متعامدان في O
و منه $C\widehat{M}B = \frac{1}{2} \times 90°$
أي $C\widehat{M}B = 45°$
الزاوية $[B\widehat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[B\widehat{M}D]$ و لدينا $B\widehat{O}D = 90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OB) متعامدان في O
و منه $B\widehat{M}D = \frac{1}{2} \times 90°$
أي $B\widehat{M}D = 45°$
لدينا $A\widehat{M}C = A\widehat{M}D + D\widehat{M}B + B\widehat{M}C$
إذن $A\widehat{M}C = 45° + 45° + 45°$
أي $A\widehat{M}C = 135°$
الزاوية $[A\widehat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[A\widehat{M}B]$ و لدينا $A\widehat{O}B = 180°$
لأن النقط A و O و B مستقيمية و $O \in [AB]$
و منه $A\widehat{M}B = \frac{1}{2} \times 180°$
أي $A\widehat{M}B = 90°$
و بالمثل نبين أن $C\widehat{M}D = 90°$
ملاحظة: يمكن في الحالتين الأخيرتين استعمال خاصية مثلث أحد أضلاعه هو قطر( أي محاط بنصف دائرة )

**7 )**




الزاويتان $[C\widehat{A}N]$ و $[C\widehat{B}N]$ محيطيتان في الدائرة (ج) و تحصران نفس القوس [CN]
إذن $C\widehat{A}N = C\widehat{B}N$ (1)
الزاويتان $[B\widehat{A}M]$ و $[B\widehat{C}M]$ محيطيتان في الدائرة (ج) و تحصران نفس القوس [BM]
إذن $B\widehat{A}M = B\widehat{C}M$ (2)
و لدينا المثلث OBC متساوي الساقين في O ( لأن OB=OC=r حيث r شعاع الدائرة (ج)
إذن زاويتا قاعدته متقايستان أي :
$C\widehat{B}N = B\widehat{C}M$ (3)

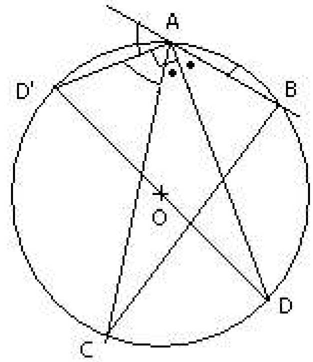
**14 )**




أ ) الزاويتان $[A\widehat{D}C]$ و $[A\widehat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة (ج) وتحصران نفس القوس [AC]
إذن $A\widehat{D}C = A\widehat{B}C$ (1)
و لدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع إذن $A\widehat{B}C = 60°$ (2)
و من (1) و(2) نستنتج أن $A\widehat{D}C = 60°$
و لدينا المثلث ADM متساوي الساقين في D لأن AD=DM
و بالتالي نستنتج أنه في المثلث ADM
$M\widehat{A}D = D\widehat{M}A = A\widehat{D}M = 60°$
أي أن المثلث DAM متساوي الأضلاع .

ب ) لدينا الزاويتان $[M\widehat{E}B]$ و $[A\widehat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]
إذن $A\widehat{C}B = M\widehat{E}B$
و لدينا $A\widehat{C}B = 60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
و منه $M\widehat{E}B = 60°$
و لدينا $A\widehat{M}D = 60°$ لأن المثلث DAM متساوي الأضلاع
و بالتالي الزاويتان $[A\widehat{M}D]$ و $[M\widehat{E}B]$ متناظرتان ومتقايستان بالنسبة للمتوازين (EB) و (MD) و القاطع لهما (ME) ، إذن : (EB) // (MD) .(1)
و لدينا الزاويتان $[C\widehat{D}B]$ و $[B\widehat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]
إذن $B\widehat{A}C = C\widehat{D}B$
و لدينا $B\widehat{A}C = 60°$
إذن $C\widehat{D}B = 60°$
و رأينا أن $A\widehat{M}D = 60°$
إذن الزاويتان $[C\widehat{D}B]$ و $[A\widehat{M}D]$ متبادلتان داخليا بالنسبة للمستقيمين (ME) و (DB) و قاطعهما (MD) و متقايستان إذن(DB)//(ME) (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي DMEB متوازي الأضلاع.

و نستنتج من (1) و (2) و(3) أن : $C\hat{A}N = B\hat{A}M$




**8 )**

أ ) الزاوية $[D\hat{O}D']$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[D\hat{A}D']$

و منه : $D\hat{O}D' = 2.D\hat{A}D'$

و لدينا $D\hat{A}D' = 90°$ لأن المنصف الداخلي و الخارجي لنفس الزاوية في مثلث ( هنا $[C\hat{A}B]$ ) يكونان متعامدان

و بالتالي $DOD' = 180°$

إذن النقط D و 'D و O مستقيمية.

ب ) لدينا الزاويتان $[D\hat{A}B]$ $[D\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BD]

إذن $D\hat{C}B = D\hat{A}B$ (1)

و الزاويتان $[D\hat{B}C]$ $[D\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [CD]

إذن $D\hat{B}C = D\hat{A}C$ (2)

و لدينا $D\hat{A}B = D\hat{A}C$ (3) ( لأن [AD] منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$ )

و من (1) و (2) و(3) نستنتج أن : $D\hat{B}C = D\hat{C}B$

أي أن المثلث DBC متساوي الساقين في D

و منه DB=DC (4)

و لدينا OB=OC=r (5) لأن B و C ينتميان إلى الدائرة (ع) شعاعها r

و من (4) و (5) نستنتج أن (OD) واسط ل [BC] أي أن ('DD) واسط [BC] لأن (OD) و ('OD) متعامدان

ج ) الزاويتان $[M\hat{E}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AC]

إذن $M\hat{E}C = A\hat{B}C$

و لدينا $A\hat{B}C = 60°$

إذن $M\hat{E}C = 60°$ (1)

و لدينا الزاويتان $[A\hat{M}D]$ و $[C\hat{M}E]$ متقابلتان بالرأس M و $A\hat{M}D = 60°$

إذن $C\hat{M}E = 60°$ (2)

و من (1) و(2) نستنتج أن المثلث MEC متساوي الأضلاع ( بين أن $M\hat{C}E = 60°$ )

لدينا DMEB متوازي أضلاع و منه DB=ME (3) و ME=MC (4) (لأن المثلث MEC متساوي الأضلاع )

و من (3) و (4) نستنتج أن DB=MC

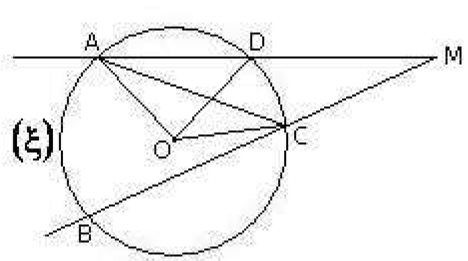
د ) لدينا $M \in [DC]$ و منه DC=DM+MC

و لدينا DM=DA ( لأن المثلث ADM متساوي الأضلاع )

و MC=DB ( حسب ج )

و بالتالي DC=DA+DB

**15 )**




لدينا $\hat{C}M = 180°$ (1) ( مجموع زوايا المثلث AMC )

و $A\hat{C}M + A\hat{C}B = 180°$ (2) لأن الزاويتين $[A\hat{C}B]$ و $[A\hat{C}M]$ متحاديتان ومتكاملتان.

و من (1) و(2) نستنتج أن $A\hat{C}B = A\hat{M}B + M\hat{A}C$ ( يمكن استعمال خاصية الزاوية الخارجية في مثلث في هذه النتيجة )

أي $A\hat{M}B = A\hat{C}B - M\hat{A}C$ (3)

و لدينا $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة $[A\hat{C}B]$

و منه $A\hat{C}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$ (4)

و كذلك $[C\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة $[M\hat{A}C]$

| | |
|---|---|
| | و منه $M\hat{A}C = \frac{1}{2}C\hat{O}D$ (5)<br>و من (3) و(4) و (5) نستنتج أن<br>$A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B - \frac{1}{2}C\hat{O}D$<br>أي $A\hat{M}B = \frac{1}{2}\left(A\hat{O}B - C\hat{O}D\right)$. |