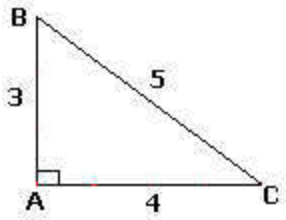
تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

حلول التمارين

1)



أ)لدينا $AB^2+AC^2=16+9=25$

و $BC^2=25$

إذن $AB^2+AC^2=BC^2$

و بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس : ABC مثلث قائم الزاوية في A

ب) $\cos A\hat{B}C=\frac{AB}{BC}$ و $\sin A\hat{B}C=\frac{AC}{BC}$ و $\tan A\hat{B}C=\frac{AC}{AB}$

أي $\cos A\hat{B}C=\frac{3}{5}$ و $\sin A\hat{B}C=\frac{4}{5}$ و $\tan A\hat{B}C=\frac{4}{3}$

2) أ) $0<\alpha<90°$

لدينا $1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ ($\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$)

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2}$

$=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

إذن $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

ب) لدينا $1+\frac{1}{\tan^2\alpha}=1+\frac{1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

إذن $1+\frac{1}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

3) $0<\alpha<90°$

$\sin\alpha=0,3$

حسب العلاقة $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

لدينا $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

$=1-0,09$

$=0,91$

أي $\cos\alpha = \sqrt{0,91} = \sqrt{\frac{91}{100}}$ لأن : $\cos\alpha > 0$

أي $\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$

و حسب العلاقة $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نحصل على $\tan\alpha = \frac{0,3}{\frac{\sqrt{91}}{10}}$

أي $\tan\alpha = \frac{3\sqrt{91}}{91}$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $1+\frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (التمرين 1) لحساب $\tan\alpha$ باستعمال $\sin\alpha$ مباشرة

ب) $\sin\alpha = \frac{5}{7}$

مثل أ) $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{5}{7}\right)^2$

$=1-\frac{25}{49}$

$=\frac{49-25}{49}$

$=\frac{24}{49}$

أي $\cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{49}}$

أي $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

و $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

أي $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

ج) $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

مثل أ) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$cos^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

أي $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

و $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}$

أي $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

4) $0<\alpha<90°$

أ) $\cos\alpha = 0,6$

حسب العلاقة $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

لدينا $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$=1-0,36$

$=0,64$

أي $\sin\alpha = \sqrt{0,64}$ و $\sin\alpha>0$

إذن $\sin\alpha=0,8$

و لدينا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{0,8}{0,6}$

أي $\tan\alpha = \frac{4}{3}$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $1 + tan^2\,\alpha = \frac{1}{cos^2}$ (التمرين 1) لحساب $tan\,\alpha$ باستعمال $cos\,\alpha$ مباشرة.

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

ب) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

مثل أ) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2$

$= 1 - \frac{18}{25}$

$= \frac{7}{25}$ أي

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ أي

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و

$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$ أي

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{14}}{6}$ أي

ج) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

مثل أ) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{16}{25}$

$= \frac{9}{25}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ أي

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و

$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ أي

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ أي

5) $0<\alpha<90°$

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

أ) $\tan\alpha=\sqrt{7}$

حسب العلاقة $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

لدينا $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\left(\sqrt{7}\right)^2$

$=1+7=8$

أي $\cos^2\alpha=\frac{1}{8}$

أي $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{8}}$ لأن $\cos\alpha>0$

أي $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

أي $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

و لدينا $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha$

أي $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{7}$

أي $\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{4}$

ب) مثل أ) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{9}{16}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{16}$

أي $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$

أي $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

و $\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}$

أي $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

ج) مثل أ) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

$=1+36$

$=37$

أي $\cos^2\alpha=\frac{1}{37}$

أي $\cos\alpha=\frac{\sqrt{37}}{37}$

و $\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha$

$=\frac{\sqrt{37}}{37}\times 6$

أي $=\frac{6\sqrt{37}}{37}$

6) $0<\alpha<90°$

أ) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

أي $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

ب) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha$

أي $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

ج) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\times\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\times\sin\alpha$

$=1+1$

$=2$

أي $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2$

7) $0<\alpha<90°$

أ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\times\cos\alpha\times\sin\alpha-1$

$=1-2\cos\alpha\sin\alpha-1$

$=-2\cos\alpha\sin\alpha$

أي $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-1=-2\cos\alpha\sin\alpha$

ب) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha-1$

$=\sin^2\alpha$

أي $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1=\sin^2\alpha$

ج) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$=\cos^2\alpha\times\cos^2\alpha$

$=\cos^4\alpha$

أي $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times\cos^2\alpha=\cos^4\alpha$

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي

د) $\sin^5\alpha+\sin^3\alpha\cos^2\alpha=\sin^3\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

أي $=\sin^3\alpha$

أي $\sin^5\alpha+\sin^3\alpha\cos^2\alpha=\sin^3\alpha$

هـ) $A=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

و باستعمال المتطابقة الهامة $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ نحصل على

$A=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ $A=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

$=0$

أي $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha=0$

ملاحظة هناك طرق أخرى مثل :

$\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha-\sin^4\alpha$

$=\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1-\sin^4\alpha$

$=(1-\cos^2\alpha)^2-\cos^4\alpha$

$=(\sin^2\alpha)^2-\sin^4\alpha$

$=\sin^4\alpha-\sin^4\alpha$

$=0$

(8 لدينا : 48°+42°=90° و: 10°+80°=90°)

$A=\cos^2 10°+\cos^2 42°+\cos^2 80°+\cos^2 48°$

$A=\cos^2 10°+\cos^2 42°+\sin^2 10°+\sin^2 42°$

$A=\cos^2 10°+\sin^2 10°+\cos^2 42°+\sin^2 42°$

$=1+1$

أي : $A=2$

لدينا : 35°+55°=90° و: 70°+20°=90°)

$B=3\cos 35°-\sin 70°+\cos 20°-3\sin 55°$

$B=3\cos 35°-\sin 70°+\sin 70°-3\cos 35°$

$=0$

أي $B=0$

لدينا : 25°+65°=90° و : 13°+77°=90°)

$C=2\cos^2 25°+\sin 13°+2\cos^2 65°-\cos 77°$

$C=2\cos^2 25°+\sin 13°+2\sin^2 25°-\sin 13°$

$=2(\cos^2 25°+\sin^2 25°)$

$=2$

أي $C=2$

(9 نحرس أولا أن نجعل الوحدة المستعملة هي الدرجة (Degrés)

أ) نكتب 27 و نضغط على زر cos و نقرأ :(أو العكس حسب المحسبة)

$\cos\alpha\approx 0{,}891$ $\sin\alpha\approx 0{,}454$ $\tan\alpha\approx 0{,}5095$

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

ب) نكتب 0,9781 ثم نضغط على Shift ثم cos فيما بعد و نقرأ $\alpha \approx 12°$
و نفس الشيء للحالتين الأخر تين
$\sin\alpha = 0{,}5299$ نقرأ $\alpha \approx 32°$
$\tan\alpha = 2{,}1445$ نقرأ $\alpha \approx 65°$

10) (0°<a<90°)

أ) $\tan\alpha - 2\sin\alpha = 0$

تكافئ : $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\sin\alpha = 0$

تكافئ : $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$ ($\cos\alpha \neq 0$ لأن (0°<a<90°))

تكافئ : $\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$

تكافئ : $\sin\alpha = 0$ أو $1 - 2\cos\alpha = 0$

أي $\sin\alpha = 0$ أو $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

أي a=0 أو a=60° حسب النسب المثلثية للزوايا الخاصة

لكن $\alpha \neq 0$ إذن قيمة a هي a=60°

ب) $2\cos^2\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$

تكافئ $\cos\alpha\left(2\cos\alpha - \sqrt{3}\right) = 0$

تكافئ $\cos\alpha = 0$ أو $2\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$

تكافئ $\cos\alpha = 0$ أو $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تكافئ a=30° أو a=90°

لكن $\alpha \neq 90°$ إذن قيم a هي a=30°

ج) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

تكافئ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

تكافئ sina=1 ($\cos\alpha \neq 0$)

تكافئ a=90°

لكن $\alpha \neq 90°$ إذن لا توجد قيمة ل a (0°<a<90°) تحقق المتساوية.

11) (0°<a<90°)

لدينا $\dfrac{\sin\alpha}{3} = \dfrac{\cos\alpha}{4}$

إذن $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{\cos^2\alpha}{16}$

و منه $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{\cos^2\alpha}{16} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{9+16} = \dfrac{1}{25}$

و منه $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{1}{25}$ و $\dfrac{\cos^2\alpha}{16} = \dfrac{1}{25}$

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي

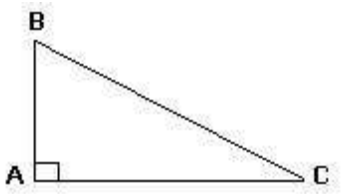
أي $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$ و $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

أي $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

لأن sina>0 و cosa>0

و نتحقق بسهولة أن $\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\cos\alpha}{4}$

(12



1. إذا أخذنا [AB] كقاعدة فإن [AC] هو الارتفاع المرتبط بها لأن (AB) و (AC) متعامدان

و منه مساحة المثلث ABC هي $\frac{AB \times AC}{2}$

أي $S = \frac{AB \times AC}{2}$

أي $2S = AB \times AC$

2 . نفترض أن $\tan A\hat{C}B = \frac{1}{2}$ و S=6,25

أ – نحسب AB و AC

في المثلث ABC $\tan(A\hat{C}B) = \frac{AB}{AC}$

أي $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ و (1) 2AB=AC

و حسب 1) $AB \times AC = 2 \times 6,25$ (2)

من (1) نحصل في (2) على :

$AB \times 2AB = 2 \times 6,25$

أي $AB^2 = 6,25$ و AB>0

و منه $AB = \sqrt{6,25}$

أي AB=2,5

ومن (1) نحصل على AC=2AB

=2×2,5

أي AC=5

تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

ب) ABC قائم الزاوية في A إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة $AB^2+AC^2=BC^2$

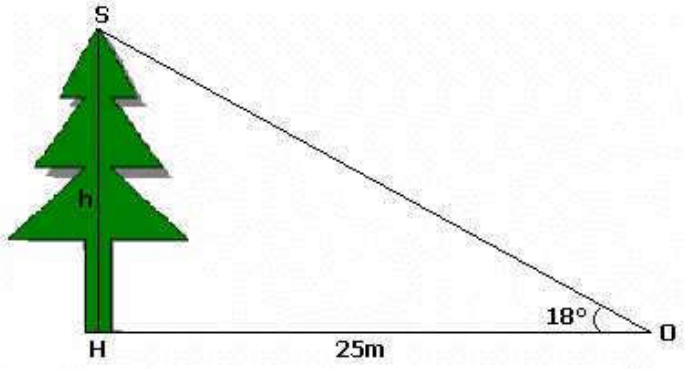
أي $BC^2=(2,5)^2+5^2$

أي $=6,25+25$

أي $=31,25$

و منه $BC=\sqrt{31,25}$

أي $BC=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$



13) أ) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan \hat{HOS}=\dfrac{HS}{OH}$

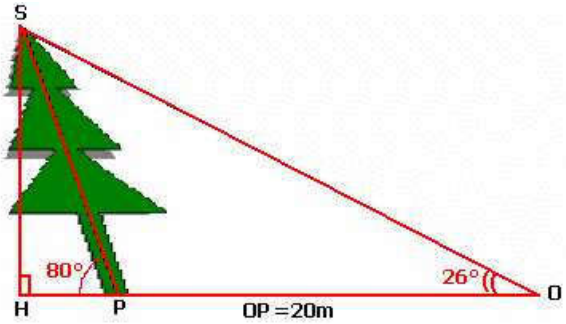
أي $HS=OH\times \tan \hat{HOS}$

أي HS = 25 x tan18°

أي HS = 25 x 0,3249

أي **HS = 8,1225**

إذن ارتفاع الشجرة هو **8,1225 m** (قيمة مقربة)



ب) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan \hat{HOS}=\dfrac{HS}{OH}$

أي $HS=OH\times \tan \hat{HOS}$

أي $HS=OH$ x $tan26°$ (1)

و كذلك المثلث HSP قائم الزاوية في H

إذن $\tan \hat{HPS}=\dfrac{HS}{HP}$

إذن $HS=\tan \hat{HPS}\times HP$

أي $HS=\tan 80°\times HP$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن tan26° x OH = tan80° x HP

ولدينا OH = OP + HP لأن $P\in[HO]$

إذن OH = 20 + HP

إذن tan26°(20+HP) = tan80° x HP

أي 20 x tan26° + HP x tan26°= HP x tan80°

أي 20 x tan26° = (tan80° - tan26°) x HP

أي $HP=\dfrac{20.\tan 26°}{\tan 80°-\tan 26°}$ (3)

A REVOIR

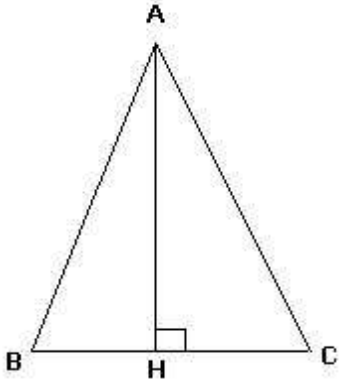
و نعود إلى (2) : $HS=\tan 80°\times HP$

إذن من (2) و (3) نستنتج أن $HS=\dfrac{20.\tan 26°\times \tan 80°}{\tan 80°-\tan 26°}$

أي HS=10,6725 m

إذن ارتفاع الشجرة هو 10,6725 m (قيمة مقربة)

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي



14) أ) المثلث ABH قائم الزاوية في H

إذن $\sin A\hat{B}H = \dfrac{AH}{AB}$

أي $AH = AB.\sin A\hat{B}H$ و لدينا $A\hat{B}H = A\hat{B}C$

إذن $AH = AB.\sin A\hat{B}C$

ب) في المثلث ABC نعتبر [BC] كقاعدة إذن [AH] هو الارتفاع المرتبط بها :

و منه مساحة المثلث ABC (نرمز لها ب $\mathcal{A}$ (ABC))

تساوي $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{BC \times AH}{2}$

و حسب أ) $AH = AB.\sin A\hat{B}C$

إذن (1) $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin A\hat{B}C$

ج) بالمثل يمكن أن نبين أن (2) $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin B\hat{A}C$

و كذلك (3) $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin B\hat{C}A$

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin C\hat{B}A = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin B\hat{C}A$$

أي $\dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C}$

أي $\dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B}$

و $\dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C}$

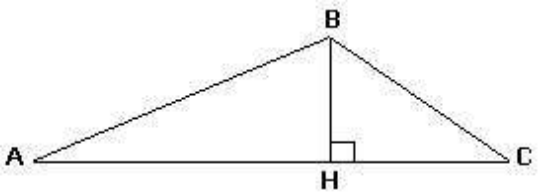
أي $AC \times \sin \hat{A} = BC \times \sin \hat{B}$ و $BA \times \sin \hat{B} = CA \times \sin \hat{C}$

أي (4) $\dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{BC}{\sin \hat{A}}$ و (5) $\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}}$

ومن (4) و (5) نستنتج أن $\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{BC}{\sin \hat{A}}$

(وتسمى هذه العلاقة بعلاقة الجيب (sinus) في مثلث)

15)



تم تحميل هذا الملف من موقع تلاميذي www.talamidi.com

أ) لدينا المثلث BCH قائم الزاوية في H
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة: $BC^2=BH^2+CH^2$
و لدينا $CH = AC - AH$
إذن $BC^2 = BH^2 + (AC-AH)^2$ (1)
و لدينا كذلك المثلث ABH قائم الزاوية في H
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة: $AB^2=BH^2+AH^2$
إذن $BH^2=AB^2-AH^2$ (2)
إذن من (1) و(2) نستنتج أن : $BC^2=AB^2-AH^2+(AC-AH)^2$
$=AB^2-AH^2+AC^2+AH^2-2AC.AH$
أي $BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AH$
ب) حسب أ) $BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AH$ (1)
و لدينا في المثلث ABH القائم الزاوية في H

$$\cos B\hat{A}H = \frac{AH}{AB} \quad \text{و} \quad B\hat{A}H = B\hat{A}C$$

أي $AH = AB.\cos B\hat{A}C$ (2)
ومن (1) و (2) نستنتج أن

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos B\hat{A}C$$

و هذه العلاقة هي تعميم لمبرهنة فيتاغورس في حالة مثلث أحد زواياه حادة ، و هذا التعميم هو مبرهنة الكاشي و هو من العلماء المسلمين المتوفى حوالي سنة 1436 ميلادية.