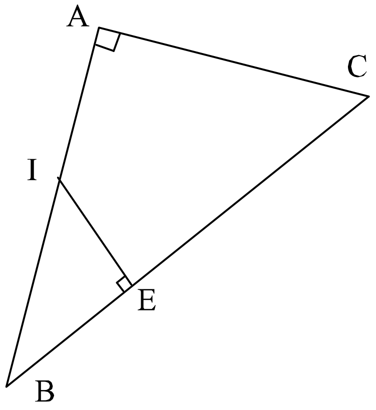
الحساب المثلثي-حلول

تمرين 1

انتبه ←   تعليق ←



① لنحسب BC ثم $Cos\left(A\hat{B}C\right)$

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ منه $BC = \sqrt{100} = 10\,cm$

منه : $Cos\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

② لنحسب $Cos\left(A\hat{B}C\right)$ بطريقة أخرى ثم نحسب EB

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $Cos\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{BE}{BI}$

نستنتج إذن حسب السؤال السابق أن : $\dfrac{BE}{BI} = \dfrac{4}{5}$ أي : $\dfrac{BE}{4} = \dfrac{4}{5}$

($BI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ لأن I منتصف $[AB]$) بالتالي : $BE = \dfrac{4 \times 4}{5} = \dfrac{16}{5}$

③ لنحسب EC و IE

لدينا : $EC = BC - BE = 10 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{50-16}{5} = \dfrac{34}{5}$

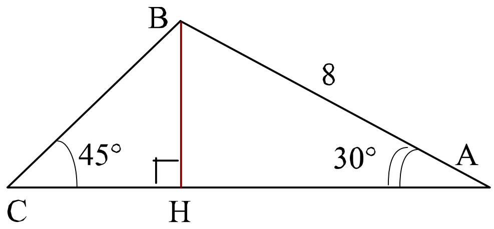
لحساب IE نحسب $Sin\left(A\hat{B}C\right)$ بطريقتين : لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC : $Sin\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $Sin\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{IE}{BI}$ منه : $\dfrac{IE}{BI} = \dfrac{3}{5}$ أي : $\dfrac{IE}{4} = \dfrac{3}{5}$ بالتالي : $IE = \dfrac{4 \times 3}{5} = \dfrac{12}{5}$

← يمكن استعمال مبرهنة فيتاغورس المباشرة أيضا لحساب IE .

تمرين 2

انتبه ←   تعليق ←



① لنحسب AH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Cos\left(H\hat{A}B\right) = \dfrac{AH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

فإن : $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي : $\dfrac{AH}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ بالتالي : $AH = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

② لنحسب BH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Sins\left(H\hat{A}B\right) = \dfrac{BH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Sin(30°) = \dfrac{1}{2}$

فإن : $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{1}{2}$ أي : $\dfrac{BH}{8} = \dfrac{1}{2}$ بالتالي : $BH = \dfrac{8}{2} = 4$

③ لنحسب BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية BCH : $Sins\left(B\hat{C}H\right) = \dfrac{BH}{BC}$

و بما أن : $B\hat{C}H = 45°$ و نحن نعلم أن : $Sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

فإن : $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ أي : $\dfrac{4}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

بالتالي : $BC = \dfrac{2 \times 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

④ لنحسب CH

لدينا في المثلث BCH : $C\hat{B}H = 180° - (45° + 90°) = 45°$

إذن فهو متساوي الساقين و منه : $CH = BH = 4$

⑤ لنحسب AC

لدينا : $AC = CH + AH = 4 + 4\sqrt{3}$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$

① لنحسب $Cos(\alpha)$	② لنحسب $Tan(\alpha)$
نعلم أن : $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ إذن : $Cos^2(\alpha)+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$ منه : $Cos^2(\alpha)+\frac{9}{25}=1$ منه : $Cos^2(\alpha)=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$ و حيث أننا نعلم أن : $Cos(\alpha)>0$ فإن : $Cos(\alpha)=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$	نعلم أن : $Tan(\alpha)=\frac{Sin(\alpha)}{Cos(\alpha)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $Tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

① لنحسب $Sin(\alpha)$ و $Cos(\alpha)$

نعلم أن : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ إذن : $\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ منه $\frac{\cos\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}$ منه $\frac{(\cos\alpha)^2}{4}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$

منه $\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}{5+4}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ ، نستنتج إذن أن :

$\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ منه $(\sin\alpha)^2=\frac{5}{9}$ و بالتالي $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $\frac{1}{9}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}$ منه $(\cos\alpha)^2=\frac{4}{9}$ و بالتالي $\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

← هناك طرق أخرى لحساب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$. لاحظ أن هذه الطريقة تعتمد على قواعد التناسب و قواعد النسب المثلثية.

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

① لنبسط :

$$A=(Cos(\alpha)+Sin(\alpha))^2+(Cos(\alpha)-Sin(\alpha))^2=Cos^2(\alpha)+2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)-2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)$$

$$A=Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1+1=2$$

$$B=\frac{Sin^4(\alpha)-Cos^4(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha))\times(Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin(\alpha)-Cos(\alpha))\times(Sin(\alpha)+Cos(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}$$

$$B=Sin(\alpha)-Cos(\alpha)$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+Sin^2(60°)-\sin(73°)+3Cos^2(70°)+\frac{1}{\tan^2(30°)}$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-Cos(17°)+3Sin^2(20°)+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$C=Cos(17°)-Cos(17°)+3\left(\cos^2(20°)+\sin^2(20°)\right)+\frac{3}{4}+\frac{1}{\frac{3}{9}}$$

$$C=\quad 0\quad +3\times 1\quad +\frac{3}{4}+\frac{9}{3}=3+\frac{3}{4}+3=6+\frac{3}{4}=\frac{24+3}{4}=\frac{27}{4}$$

← لاحظ أن التبسيط اعتمد على تطبيق الخاصية $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ و على المتطابقات الهامة.

تمرين 6 انتبه ← تعليق ←

معطيات : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ و $0<x<90°$

① لنحدد قيمة x

لدينا : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ منه : $2\sin(x)-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=0$ منه : $\sin(x)\left(2-\dfrac{1}{\cos(x)}\right)=0$

إذن : $\sin(x)=0$ أو $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ ، و لكن لدينا حسب المعطيات $0<x<90°$ أي أن $\sin(x)>0$

إذن : $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ منه : $2=\dfrac{1}{\cos(x)}$ منه : $2\cos(x)=1$ منه : $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$

و بالتالي : $\underline{x=60°}$

← لاحظ أن إيجاد العدد x يعتمد على إيجاد إحدى نسبه المثلثية ثم استعمال جدول قيم النسب المثلثية الخاصية لتحديد قيمته.