المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمي	حلول التمارين الترتيب و العمليـــــــــات المستـــــوى : الثالثة ثانــوي إعـــدادي من إعداد الأستاذ : المهــــدي عنيـــس	

تمرين ① :

1) – لنقارن ما يلي :

✠ $\dfrac{-7}{18}$ و $\dfrac{-5}{9}$:

لدينا : $\dfrac{-7}{18}-\dfrac{-5}{9}=\dfrac{-7}{18}-\dfrac{-10}{18}=\dfrac{-7+10}{18}=\dfrac{3}{18}=\dfrac{1}{6}$.

إذن : بما أن : $\dfrac{1}{6}\geq 0$: فإن $\dfrac{-7}{18}-\dfrac{-5}{9}\geq 0$. و منه فإن : $\boxed{\dfrac{-7}{18}\geq\dfrac{-5}{9}}$.

✠ $-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ و $-\sqrt{2}$:

لدينا : $\dfrac{1}{2}\geq 0$ يعني أن : $-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\geq 0+\left(-\sqrt{2}\right)$ و منه فإن : $\boxed{-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\geq-\sqrt{2}}$.

✠ $\dfrac{12}{5}+3^{2012}$ و $\dfrac{3}{7}+3^{2012}$:

لدينا : $\dfrac{12}{5}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{84}{35}-\dfrac{15}{35}=\dfrac{69}{35}$.

إذن : بما أن : $\dfrac{69}{35}\geq 0$ فإن : $\dfrac{12}{5}-\dfrac{3}{7}\geq 0$ و منه فإن : $\dfrac{12}{5}\geq\dfrac{3}{7}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\dfrac{12}{5}+3^{2012}\geq\dfrac{3}{7}+3^{2012}}$.

✠ $2\sqrt{7}\times\dfrac{11}{25}$ و $2\sqrt{7}\times\dfrac{18}{5}$:

لدينا : $\dfrac{11}{25}-\dfrac{18}{5}=\dfrac{11}{25}-\dfrac{90}{25}=\dfrac{-79}{25}$.

إذن : بما أن : $\dfrac{-79}{25}\leq 0$ فإن : $\dfrac{11}{25}-\dfrac{18}{5}\leq 0$ و منه فإن : $\dfrac{11}{25}\leq\dfrac{18}{5}$.

و بما أن : $2\sqrt{7}>0$ فإن : $\boxed{\dfrac{11}{25}\times 2\sqrt{7}\leq\dfrac{18}{5}\times 2\sqrt{7}}$.

✠ $-\sqrt{3}\times\dfrac{13}{7}$ و $-\sqrt{3}\times\dfrac{11}{2}$:

لدينا : $\dfrac{13}{7}-\dfrac{11}{2}=\dfrac{26}{14}-\dfrac{77}{14}=\dfrac{-51}{14}$.

إذن : بما أن : $\dfrac{-51}{14}\leq 0$ فإن : $\dfrac{13}{7}-\dfrac{11}{2}\leq 0$ و منه فإن : $\dfrac{13}{7}\leq\dfrac{11}{2}$.

و بما أن : $-\sqrt{3}<0$ فإن : $\boxed{-\sqrt{3}\times\dfrac{13}{7}\geq-\sqrt{3}\times\dfrac{11}{2}}$.

2) – x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>0$ و $y<0$.

✠ لنقارن : $x+y$ و $y-x$:

لدينا : $(x+y)-(y-x)=x+y-y+x=2x$.

و بما أن : $x>0$ فإن $2x>0$ و منه فإن : $(x+y)-(y-x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{x+y>y-x}$.

✠ لنقارن : $3y+x$ و $4y+x$:

لدينا : $(3y+x)-(4y+x)=3y+x-4y-x=-y$.

و بما أن : $y<0$ فإن : $-y>0$ و منه فإن : $(3y+x)-(4y+x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{3y+x>4y+x}$.

3) – قارن العددين الحقيقيين a و b بحيث : $a=\sqrt{12}+\sqrt{27}$ و $b=\sqrt{48}$:

لدينا : $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ و $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

و بما أن : $5\sqrt{3}\geq 4\sqrt{3}$ فإن : $\sqrt{12}+\sqrt{27}\geq\sqrt{48}$ و بالتالي فإن : $\boxed{a\geq b}$.

❀ تمرين ② :

1) – لنقارن بين ما يلي :

✠ $3\sqrt{7}$ و $2\sqrt{17}$:

لدينا : $\left(3\sqrt{7}\right)^2=63$ و $\left(2\sqrt{17}\right)=68$.

إذن : $\left(3\sqrt{7}\right)^2\leq\left(2\sqrt{17}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}3\sqrt{7}>0\\2\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{3\sqrt{7}\leq 2\sqrt{17}}$.

✠ $-5\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{11}$:

لدينا : $\left(-5\sqrt{5}\right)^2=125$ و $\left(-3\sqrt{11}\right)^2=99$.

إذن : $\left(-5\sqrt{5}\right)^2\geq\left(-3\sqrt{11}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}-5\sqrt{5}<0\\-3\sqrt{11}<0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{-5\sqrt{5}\leq -3\sqrt{11}}$.

✠ $\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$:

لدينا : $3\sqrt{5}>0$.

*/ لنحدد إشارة $\sqrt{3}-\sqrt{17}$.

لدينا : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}^2=3\\\sqrt{17}^2=17\end{matrix}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2<\sqrt{17}^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}>0\\\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\sqrt{3}\leq\sqrt{17}$ و منه فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17}<0$

بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}-\sqrt{17}<0\\3\sqrt{5}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{17}<3\sqrt{5}}$.

✠ $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$:

لدينا : $\left(\sqrt{3}+2\right)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times 2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$ و $\left(\sqrt{7+2\sqrt{11}}\right)^2=7+2\sqrt{11}$.

*/ لنقارن : $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{11}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\left(4\sqrt{3}\right)^2=48\\ \left(2\sqrt{11}\right)^2=44\end{array}\right\}$ إذن : $\left(4\sqrt{3}\right)^2\geq\left(2\sqrt{11}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}4\sqrt{3}>0\\ 2\sqrt{11}>0\end{array}\right\}$ فإن : $4\sqrt{3}\geq 2\sqrt{11}$.

و منه فإن : $7+4\sqrt{3}\geq 7+2\sqrt{11}$ أي $\left(\sqrt{3}+2\right)^2\geq\left(\sqrt{7+\sqrt{11}}\right)^2$

و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+2>0\\ \sqrt{7+\sqrt{11}}>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}+2\geq\sqrt{7+\sqrt{11}}}$.

2)– a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a\leq b$.

أ) -- ✠ لنثبت أن : $a+1\leq b+\frac{5}{4}$.

لدينا : $5>4$ ، إذن : $1\leq\frac{5}{4}$ و بما أن : $a\leq b$ فإن : $\boxed{a+1\leq b+\frac{5}{4}}$.

✠ لنثبت أن : $b+\sqrt{7}\geq a-3\sqrt{7}$.

لدينا : $\sqrt{7}\geq -3\sqrt{7}$ و بما أن : $b\geq a$ فإن : $b+\sqrt{7}\geq a+\left(-3\sqrt{7}\right)$ أي : $\boxed{b+\sqrt{7}\geq a-3\sqrt{7}}$.

ب) -- لنقارن العددين : $\frac{a^2+3b^2}{4}$ و b^2.

لدينا : $\frac{a^2+3b^2}{4}-b^2=\frac{a^2+3b^2}{4}-\frac{4b^2}{4}=\frac{a^2+3b^2-4b^2}{4}=\frac{a^2-b^2}{4}$.

وبما أن : $a\leq b$ فإن : $a^2\leq b^2$ و منه فإن : $a^2-b^2\leq 0$ ، و بما أن $4\geq 0$ فإن : $\frac{a^2-b^2}{4}\leq 0$

و منه فإن : $\frac{a^2+3b^2}{4}-b^2\leq 0$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{a^2+3b^2}{4}\leq b^2}$.

3)– a و b و c أعداد حقيقية موجبة.

أ) --لنثبت أن : $a^2+b^2\geq 2ab$.

لدينا : $\left(a^2+b^2\right)-2ab=a^2+b^2-2ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

و بما أن : $(a-b)^2\geq 0$ فإن : $\left(a^2+b^2\right)-2ab\geq 0$ و بالتالي فإن : $a^2+b^2\geq 2ab$.

ب) -- لنستنتج أن : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

لدين من خلال ما سبق أن : $\left.\begin{array}{l}a^2+b^2\geq 2ab\\ b^2+c^2\geq 2bc\\ a^2+c^2\geq 2ac\end{array}\right\}$ و منه فإن : $\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\geq 2ab+2bc+2ac$

أي : $a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2\geq 2(ab+bc+ac)$ و منه فإن : $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2(ab+bc+ac)$

إذن : $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2(ab+bc+ac)$ و منه فإن : $a^2+b^2+c^2=\frac{2(ab+bc+ac)}{2}$

و بالتالي فإن : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

ج)-- علما أن : $a^2+b^2+c^2=1$ لنبين أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$.

لدينا :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=\left[(a+b)+c\right]^2=(a+b)^2+2\times(a+b)\times c+c^2\\&=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\&=\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ac)\\&=1+2(ab+bc+ac)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)}$.

د)-- لنستنتج من ما سبق أن : $a+b+c\le\sqrt{3}$.

نعلم أن : و $\left.\begin{array}{r}a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac\\ a^2+b^2+c^2=1\end{array}\right\}$ ، إذن : $1\ge ab+bc+ac$. (1)

و بما أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$ فإن : $ab+bc+ac=\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$. (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن : $1\ge\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$ أي : $\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}\le 1$ ،

و منه فإن : $(a+b+c)^2-1\le 2$ يعني أن : $(a+b+c)^2\le 2+1$ أي : $(a+b+c)^2\le 3$

و بالتالي فإن : $\sqrt{(a+b+c)^2}\le\sqrt{3}$ أي : $\boxed{a+b+c\le\sqrt{3}}$.

تمرين ③ :

1) – لنبين أن : $x-y=\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}x-y&=\frac{2}{\sqrt{3}+1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-1^2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3-1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2}{2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2-5-\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}-7}{2}\end{aligned}$$

2) –(أ-- لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\7^2=49\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{3}^2\le 7^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\7>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\le 7}$.

ب)-- لنستنتج مقارنة x و y :

لدينا : $\sqrt{3}\le 7$ يعني أن : $\sqrt{3}-7\le 0$ و منه فإن : $\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}\le 0$ أي : $x-y\le 0$

و بالتالي فإن : $\boxed{x\le y}$.

❀ تمرين ④:

1)–(أ-- ✠ لنقارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}^2=7\\2^2=4\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{7}^2\ge 2^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}>0\\2>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{7}\ge 2}$.

✠ لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 5 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\5^2=25\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2\le 5^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\5>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\le 5}$.

ب)-- لنستنتج تبسيط العددين : $m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$ و $n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}$.

نعلم أن : $\sqrt{7}\ge 2$ يعني : $\sqrt{7}-2\ge 0$ و منه فإن : $\boxed{m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=\sqrt{7}-2}$.

و نعلم أن : $\sqrt{3}\le 5$ يعني أن : $\sqrt{3}-1\le 0$ و منه فإن : $\boxed{n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}=5-\sqrt{3}}$.

2) –(أ-- أنشر و بسط العددين : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2$ و $\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{5}-4\right)^2=\sqrt{5}^2-2\times4\times\sqrt{5}+4^2=5-8\sqrt{5}+16=21-8\sqrt{5}\\\left(6-\sqrt{2}\right)^2=6^2-2\times6\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=36-12\sqrt{2}+2=38-12\sqrt{2}\end{array}\right\}$.

ب) -- ✠ لنستنتج تبسيطا للعدد : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

لدينا : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2=21-8\sqrt{5}$ يعني أن : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $\sqrt{5}-4$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}^2=5\\4^2=16\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\le 4^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}>0\\4>0\end{array}\right\}$ فإن : $\sqrt{5}\le 4$ و منه : $\boxed{\sqrt{5}-4\le 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}=4-\sqrt{5}}$.

✠ لنستنتج تبسيط للعدد : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

لدينا : $\left(6-\sqrt{2}\right)^2=38-12\sqrt{2}$ يعني أن : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $6-\sqrt{2}$.

لدينا : $\left.\begin{matrix}6^2=36\\ \sqrt{2}^2=2\end{matrix}\right\}$ ، إذن : $6^2\geq\sqrt{2}^2$ و بما أن : $\left.\begin{matrix}6>0\\ \sqrt{2}>0\end{matrix}\right\}$ و فإن : $6\geq\sqrt{2}$ و منه فإن : $\boxed{6-\sqrt{2}\geq 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}}$.

❀ تمرين ⑤:

1) – ✠ لنثبت أن : $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

لدينا : $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\dfrac{1\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

✠ لنثبت أن : $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

لدينا : $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2}=\dfrac{1\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

2) –(أ– -- لنقارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$.

لدينا : $\left.\begin{matrix}\sqrt{5}^2=5\\ 1^2=1\end{matrix}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\geq 1^2$ و بما أن : $\left.\begin{matrix}\sqrt{5}>0\\ 1>0\end{matrix}\right\}$ و فإن : $\sqrt{5}\geq 1$ و منه فإن : $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1}$.

ب) -- لنستنتج مقارنة العددين : $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ و $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

نعلم أن : $\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1$ يعني أن : $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\leq\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ و بما أن : $\left.\begin{matrix}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\end{matrix}\right\}$ و فإن :

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\leq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

❀ تمرين ⑥:

1) – لنبين أن : $\dfrac{2}{3}\leq c\leq 1$.

لدينا : $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{3c-1}{2}\leq 1$ يعني أن : $\dfrac{1}{2}\times 2\leq\dfrac{3c-1}{2}\times 2\leq 1\times 2$ و منه فإن : $1\leq 3c-1\leq 2$

إذن : $1+1\leq 3c-1+1\leq 2+1$ أي : $2\leq 3c\leq 3$ و منه فإن : $2\times\dfrac{1}{3}\leq 3c\times\dfrac{1}{3}\leq 3\times\dfrac{1}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\dfrac{2}{3}\leq c\leq 1}$.

2) – ✠ لنؤطر : $a+b$

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\-7\le b\le -6\end{array}\right\}$ ، إذن : $9-7\le a+b\le 16-6$ و منه فإن : $\boxed{2\le a+b\le 10}$.

✠ لنؤطر : ab

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\6\le -b\le 7\end{array}\right\}$ ، إذن : $9\times 6\le a\times(-b)\le 16\times 7$ أي : $54\le -ab\le 112$ و منه فإن :
$\boxed{-112\le ab\le -54}$.

✠ لنؤطر : $\dfrac{a}{b}$

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\ \dfrac{1}{7}\le \dfrac{1}{-b}\le \dfrac{1}{6}\end{array}\right\}$ ، إذن : $9\times\dfrac{1}{7}\le a\times\dfrac{1}{-b}\le 16\times\dfrac{1}{6}$ أي : $\dfrac{9}{7}\le \dfrac{a}{-b}\le \dfrac{16}{6}$

و منه فإن : $\dfrac{9}{7}\le \dfrac{a}{-b}\le \dfrac{8}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\dfrac{8}{3}\le \dfrac{a}{b}\le -\dfrac{9}{7}}$.

✠ لنؤطر : $-3a+2b-15$

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\-7\le b\le -6\end{array}\right\}$ ، إذن : $\left.\begin{array}{l}-3\times 16\le -3a\le -3\times 9\\2\times(-7)\le 2b\le 2\times(-6)\end{array}\right\}$ أي : $\left.\begin{array}{l}-48\le -3a\le -27\\-14\le 2b\le -12\end{array}\right\}$

و منه فإن : $-48-14-15\le -3a+2b-15\le -27-12-15$ و بالتالي فإن : $\boxed{-77\le -3a+2b-15\le -54}$.

✠ لنؤطر : $2\sqrt{a}+d$

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\-2\le d\le -1\end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9}\le \sqrt{a}\le \sqrt{16}\\-2\le d\le -1\end{array}\right\}$ أي : و $\left.\begin{array}{l}3\le \sqrt{a}\le 4\\-2\le d\le -1\end{array}\right\}$ و منه فإن : $3-2\le \sqrt{a}+d\le 4-1$

و بالتالي فإن : $\boxed{1\le \sqrt{a}+d\le 3}$.

✠ لنؤطر : a^2+bd-b^2

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}9\le a\le 16\\6\le -b\le 7\\1\le -d\le 2\end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{l}81\le a^2\le 256\\-49\le -b^2\le -36\\6\le bd\le 14\end{array}\right\}$ و منه فإن : $81+6-49\le a^2+bd-b^2\le 256+14-36$

و بالتالي فإن : $\boxed{38\le a^2+bd-b^2\le 234}$.

✠ لنؤطر : $\dfrac{2b-d}{a+b}$: نضع : $\dfrac{2b-d}{a+b}=(2b-d)\times\dfrac{1}{a+b}$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}-7\le b\le -6\\-2\le d\le -1\end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{l}-14\le 2b\le -12\\1\le -d\le 2\end{array}\right\}$ و منه فإن : $-14+1\le 2b-d\le -12+2$ أي : $\boxed{-13\le 2b-d\le -10}$

نعلم أن : $2 \le a+b \le 10$ ، إذن : $\boxed{\frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2}}$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{r} -13 \le 2b-d \le -10 \\ \frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ ، إذن : $\left.\begin{array}{r} 10 \le -(2b-d) \le 13 \\ \frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ ومنه فإن : $10 \times \frac{1}{10} \le -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \le 13 \times \frac{1}{2}$

أي : $1 \le -\frac{2b-d}{a+b} \le \frac{13}{2}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\frac{13}{2} \le \frac{2b-d}{a+b} \le -1}$.

✠ لنؤطر $\sqrt{a^2-ab+b^2}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{r} 9 \le a \le 16 \\ -7 \le b \le -6 \end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{r} 81 \le a^2 \le 256 \\ -112 \le ab \le -54 \\ (-6)^2 \le b^2 \le (-7)^2 \end{array}\right\}$ و منه فإن : $\left.\begin{array}{r} 81 \le a^2 \le 256 \\ 54 \le -ab \le 112 \\ 36 \le b^2 \le 49 \end{array}\right\}$

إذن : $81+54+36 \le a^2-ab+b^2 \le 256+112+49$ و منه فإن : $171 \le a^2-ab+b^2 \le 417$.

و بالتالي فإن : $\sqrt{171} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}$ أي : $\boxed{3\sqrt{19} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}}$