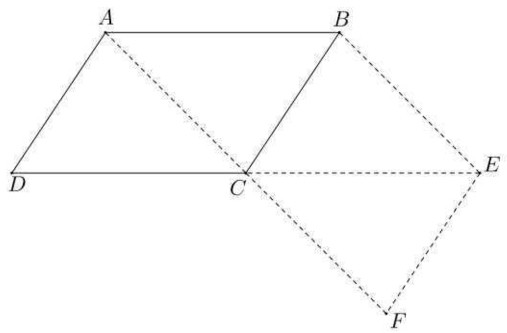
حلول التمارين

المتجهات و الإزاحة

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:



1) – الشكل :

لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$ يعني أن الرباعي $ABEC$ متوازي الأضلاع.

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}$ يعني أن $BEFC$ متوازي الأضلاع.

2) – لنثبت أن : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$.

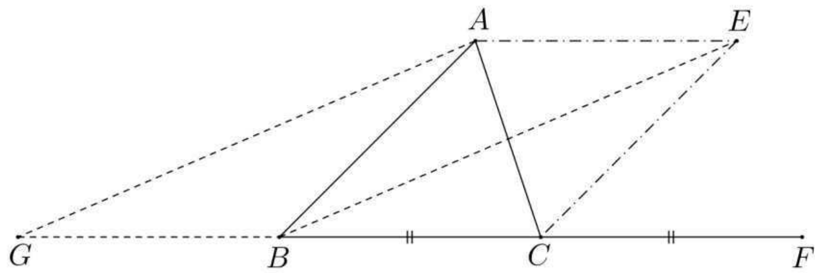
نعلم أن : $ABEC$ متوازي الأضلاع ، إذن : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

و أن : $BEFC$ متوازي الأع ، إذن : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}$

و منه فإن : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EF}$ يعني أن : $ADFE$ متوازي الأضلاع

و بالتالي فإن : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$.

تمرين ②:



1) – الشكل :

لدينا :

*/ E صورة A بالإزاحة التي تحول B إلى C

يعني أن : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}$

أي : $BCEA$ متوازي الأضلاع.

*/ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CF}$ يعني : C منتصف $[BF]$.

2) – لنبين أن : $AEFC$ متوازي الأضلاع.

نعلم أن : و $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CF}\end{array}\right\}$ يعني أن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}$ و منه فإن الرباعي $AEFC$ متوازي الأضلاع.

3) – أ) -- لننشئ G.

لدينا : $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}$ يعني أن $EAGB$ متوازي الأضلاع. (أنظر الشكل)

ب) -- لنثبت أن : $\overrightarrow{GF}=3\overrightarrow{AE}$:

لدينا : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$.

و بما أن : $EAGB$ متوازي الأضلاع فإن : $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AE}$.

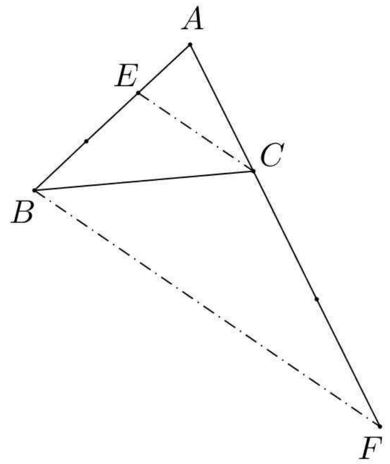
و نعلم أن : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}\end{array}\right\}$.

إذن : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}$

أي : $\boxed{\overrightarrow{GF}=3\overrightarrow{AE}}$.

❀ تمرين ③ :

1) – الشكل :



لدينا : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ يعني أن :

/* A و E و B نقط مستقيمية.

/* $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AB}$ هما نفس المنحى.

/* $AE=\frac{1}{3}AB$.

و لدينا : $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$ يعني أن :

/* A و F و C نقط مستقيمية.

/* $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما نفس المنحى.

/* $AF=3AC$.

2) – لنثبت أن : $(CE)\,//\,(FB)$.

لدينا : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، و حسب علاقة شال فإن : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)$ و منه فإن :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$$

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\times 3\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$$

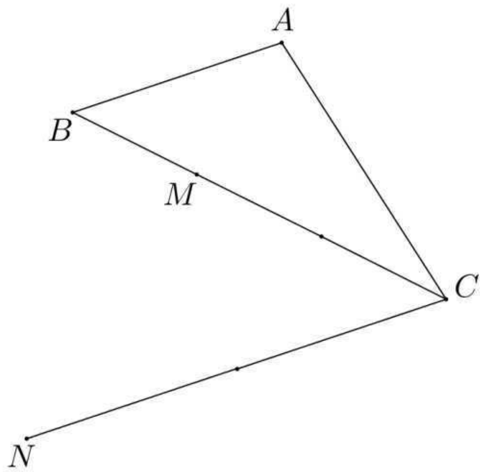
$$\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$$

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$$

و بالتالي فإن : $(CE)\,//\,(FB)$.

❀ تمرين ④ :

1) – الشكل :



لدينا : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ يعني أن :

/* B و M و C نقط مستقيمية.

/* $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BC}$ هما نفس النحى.

/* $BM=\frac{1}{3}BC$.

و لدينا : $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AB}$ يعني أن :

/* $(CN)\,//\,(AB)$.

/* $\overrightarrow{CN}$ و $\overrightarrow{AB}$ هما نفس المنحى.

/* $CN=2AB$.

2) – */ لنثبت أن : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$.

لدينا حسب علاقة شال : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$.

و بما أن : $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AB}$ ، فإن : $\boxed{\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}$.

/* لنثبت أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

لدينا حسب علاقة شال : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$.

و بما أن : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ فإن : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، و حسب علاقة شال فإن : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$.

و منه فإن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{3\overrightarrow{AB}}{3}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

و بالتالي فإن : $\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$.

3) – لنستنتج أن النقط A و M و N مستقيمية.

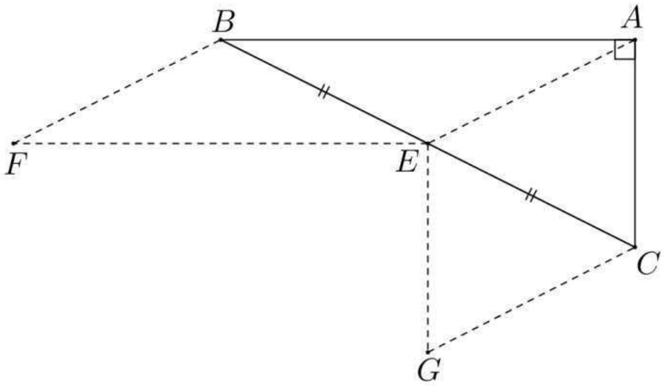
نعلم أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ، يعني أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\right)$.

و بما أن : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$ فإن : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$.

و التالي فإن : النقط A و M و N مستقيمية.

تمرين ⑤ :

1) – الشكل :



لدينا :

/* F صورة B بالإزاحة t يعني أن : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$

أي أن : $AEFB$ متوازي الأضلاع.

/* G صورة C بالإزاحة t يعني أن : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$

أي أن : $AEGC$ متوازي الأضلاع.

2) – لنحسب EG :

/* الطريقة الولى :

نعلم أن الرباعي $AEGC$ متوازي الأضلاع ، إذن : $AC=EG$.

و بما أن : $AC=4\,cm$ فإن : $EG=4\,cm$.

/* الطريقة الثانية :

لدينا : E صورة A بالإزاحة t و G صورة C بالإزاحة t

إذن : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ يعني أن : $AC=EG$.

و بما أن : $AC=4\,cm$ فإن : $EG=4\,cm$.

3) – لنثبت أن : $(FG) // (BC)$.

نعلم أن : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ و أن : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$.

إذن : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ يعني أن الرباعي $CGFB$ متوازي الأضلاع

و منه فإن : $(FG) // (BC)$.

4) – لنحدد طبيعة المثلث FEG.

لدينا بالإزاحة t :

F صورة B و E صورة A و G صورة C

إذن صورة الزاوية $B\hat{A}C$ بالإزاحة t هي الزاوية $F\hat{E}G$.

و بما أن الزاوية $B\hat{A}C$ قائمة فإن الزاوية $F\hat{E}G$ قائمة.

و بالتالي فإن FEG مثلث قائم الزاوية في E.

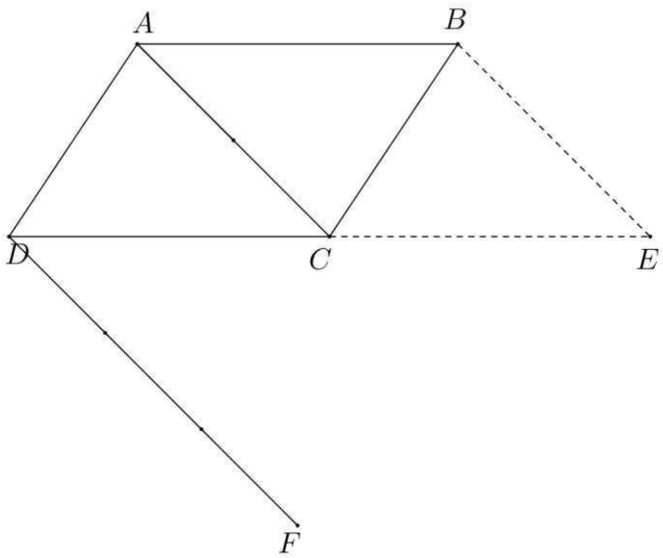
5) – لنحدد صورة الدائرة التي مركزها A و شعاعها AC بالإزاحة t.

نعلم أن : E صورة A و G صورة C بالإزاحة t.

إذن :

صورة الدائرة التي مركزها A و شعاعها AC بالإزاحة t هي الدائرة التي مركزها E و شعاعها EG.

❀ تمرين ⑥ :



1) – الشكل :

لدينا :

E صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$

يعني أن : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ أي $ACEB$ متوازي الأضلاع.

و لدينا : $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ يعني أن :

*/ $(DF) // (AC)$.

*/ $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DF}$ لهما نفس المنحى.

*/ $DF = \frac{3}{2}AC$.

2) – لنثبت أن المتجهتين $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DF}$ مستقيميتان.

نعلم أن $ACEB$ متوازي الأضلاع.

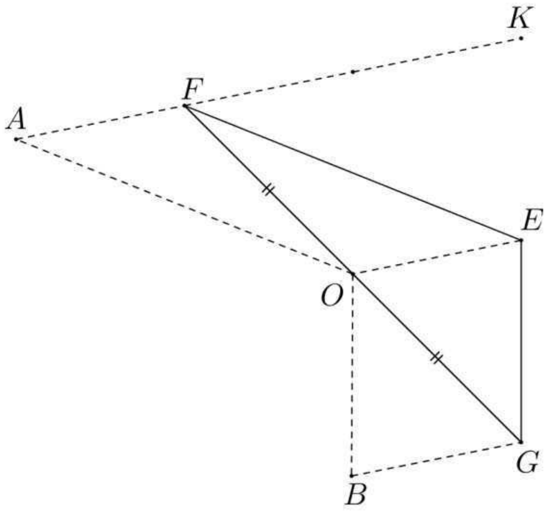
إذن : $(BE) // (AC)$

و بما أن : $(DF) // (AC)$

فإن : $(DF) // (BE)$

و بالتالي فإن : المتجهتين $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DF}$ مستقيميتان.

تمرين ⑦ :



1) – الشكـل :

لدينا :

A صورة F بالإزاحة t يعني أن : $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{FA}$

أي : $EOAF$ متوازي الأضلاع.

و لدينا : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EO}$ يعني أن :

$EGBO$ متوازي الأضلاع.

2) – لنثبت أن : B صورة G بالإزاحة t.

نعلم أن $EGBO$ متوازي الأضلاع

إذن : $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{GB}$

و منه فإن : B صورة G بالإزاحة t.

3) – لنحدد صورة المستقيم (EF) بالإزاحة t.

لدينا :

O صورة E بالإزاحة t و نعلم أن A صورة F بالإزاحة t

إذن : صورة المستقيم (EF) بالإزاحة t هي المستقيم (OA).

4) – لنبين أن : $F\hat{E}G = A\hat{O}B$.

لدينا بالإزاحة t : A صورة F و O صورة E و B صورة G.

إذن الزاوية $A\hat{O}B$ هي صورة الزاوية $F\hat{E}G$ بالإزاحة t

و بالتالي فإن : $F\hat{E}G = A\hat{O}B$.

5) – لنحدد صورة الدائرة التي قطرها $[EG]$ بالإزاحة t.

لدينا بالإزاحة t : O صورة E و B صورة G.

إذن صورة الدائرة التي قطرها $[EG]$ بالإزاحة t هي الدائرة التي قطرها $[OB]$.

6) – أ) -- لننشئ K : (أنظر الشكـل)

لدينا حسب علاقة شال : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FK}$

و نعلم أن : $\overrightarrow{FK} = -2\overrightarrow{EO}$

و بما أن : $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{FA}$ ، فإن : $\overrightarrow{FK} = -2\overrightarrow{FA}$

أي : $\overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{AF}$

و منه فإن : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AF}$

أي : $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AF}$

و بالتالي فإن : النقط A و F و K مستقيمية.