الحلول

I لتكن 4^n و 4^{n+1} و 4^{n+2} و 4^{n+3} و 4^{n+4} و 4^{n+5} و 4^{n+6} سبع قوى متتابعة للعدد 4 .
$(n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + 4^{n+3} + 4^{n+4} + 4^{n+5} + 4^{n+6} &= 4^n(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6)\\ &= 4^n(1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + + 4096)\\ &= 4^n \times 5461\end{aligned}$$

إذن مجموع سبع قوى متتابعة للعدد 4 قابل للقسمة على 5461 .

II

$$\begin{aligned}P &= (100 - 1)(100 - 2)(100 - 3) \ldots\ldots (100 - 115)\\ &= (100 - 1)(100 - 2)(100 - 3) \ldots\ldots (100 - 100) \ldots\ldots (100 - 115)\\ &= (100 - 1)(100 - 2)(100 - 3) \ldots\ldots 0 \ldots\ldots (100 - 115)\\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

III (1

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} &= \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}\\ &= \frac{n + \frac{1}{2} - n + \frac{1}{2}}{(2n-1)(2n+1)}\\ &= \boxed{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}\end{aligned}$$

2) في المتساوية $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$

نعوض n ب 1 و 2 و 3 و .... و 50

- $n = 1$: $\dfrac{1}{1 \times 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}$
- $n = 2$: $\dfrac{1}{3 \times 5} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{10}$
- $n = 3$: $\dfrac{1}{5 \times 7} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{14}$

|
|
|

- $n = 50$: $\dfrac{1}{99 \times 101} = \dfrac{1}{198} - \dfrac{1}{202}$

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots\dots\dots + \frac{1}{99 \times 101}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{198} - \frac{1}{202}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{202}$$

$$= \frac{101 - 1}{202}$$

$$= \frac{100}{202}$$

$$= \boxed{\frac{50}{101}}$$

IV بما أن $2b = a + c$ فإن $b = \dfrac{a+c}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{a-\frac{a+c}{2}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{a-c}$$

$$= \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}}$$

V بما أن الدئرة $\mathscr{C}(O_1 ; r_1)$ مماسة للمستقيم (Δ) في النقطة A فإن : $(O_1A) \perp (\Delta)$

نبرهن بنفس الطريقة

أن $(O_2A) \perp (\Delta)$ و $(O_3A) \perp (\Delta)$.

و نعلم أن من نقطة يمر مستقيم وحيد

عمودي على مستقيم معلوم .

إذن : النقط O_1 و O_2 و O_3 مستقيمية .