www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

*** Définition :** Un *système de deux équations* du premier degré à *deux inconnues* x et y est de la forme :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres donnés.

Un couple (x, y) est *solution d'un système* s'il vérifie simultanément les deux égalités.

*** Exemple 1 :** $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

*** Exemple 2 :** Le couple $(3{,}1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?

Pour $x = 3$ et $y = 1$: $\begin{cases} 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 + 1 = 4 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 3$ et $y = 1$.

Donc le couple $(3{,}1)$ est solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

II- Résolution du système :

*** Définition :** Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

1) Résoudre algébriquement un système :

a/ Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

➔ On a : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :

$\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3 \times (9 + 3x) = -17 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 9x = -17 + 27 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = 10 \end{cases}$, Alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \frac{10}{-5} = -2 \end{cases}$

Enfin : $\begin{cases} y = 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Donc le couple $(-2{,}3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés de l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaison linéaire.

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

➔ On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la deuxième par **(-5)**.

$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ -5 \times (2x + 5y) = -5 \times 1 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ -10x - 25y = -5 \end{cases}$

* On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$10x + (-10x) - 8y + (-25y) = 16 + (-5)$

* On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de $\boldsymbol{y}$.

$10x - 10x - 8y - 25y = 16 - 5$

c'est-à-dire : $-33y = 11$ donc : $y = \frac{11}{-33}$ signifie que : $\boldsymbol{y = \frac{-1}{3}}$.

* On remplace $\boldsymbol{y}$ par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver $\boldsymbol{x}$.

Ici on choisit la 2ème équation et on trouve : $2x + 5 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$

c'est-à-dire : $2x - \frac{5}{3} = 1$

$2x = 1 + \frac{5}{3}$ ➔ $2x = \frac{3}{3} + \frac{5}{3}$ ➔ $2x = \frac{8}{3}$ ➔ $x = \frac{8}{3} \div 2$ ➔ $x = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2}$ ➔ $x = \frac{8}{6}$

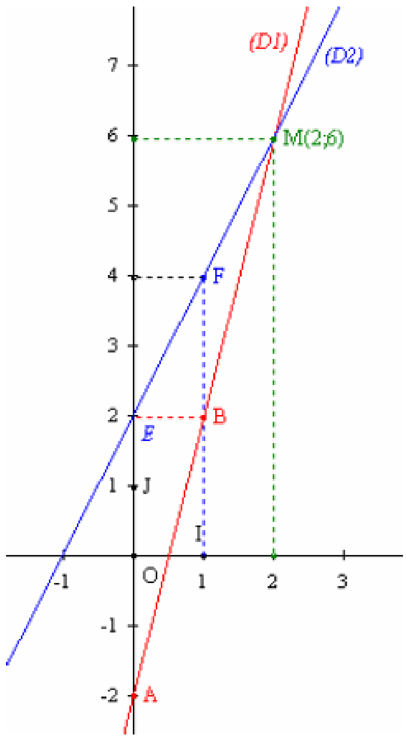
Donc : $\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$.

Alors le couple $(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ est la solution de ce système.

2) Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé.

La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.



*** Exemple :** Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

➔ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x, et on obtient :

$\begin{cases} -y = -4x + 2 \\ -y = -2x - 2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y = 4x - 2$, et (D_2) d'équation : $y = 2x + 2$.

- Pour (D_1) : $\begin{cases} x_A = 0 \implies y_A = 4x_A - 2 = 4 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2 \\ x_B = 1 \implies y_B = 4x_B - 2 = 4 \times 1 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

- Pour (D_2) : $\begin{cases} x_E = 0 \implies y_E = 2x_E + 2 = \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ x_F = 1 \implies y_F = 2x_F + 2 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$.

* Les deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ se coupent en un point : $M(2,6)$.

➔ Alors le couple $(2,6)$ est la solution de ce système.

> *** Remarque :** - Si les deux droites *ont le même coefficient directeur*, alors *le système n'a pas de solution*.
>
> - Si les deux droites ont *le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine*, alors *le système a plusieurs solutions*.

III- Résolution d'un problème avec un système :

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

*** Règle :** Les étapes pour résoudre un problème :

- Choisir les inconnues.
- Mise en système d'équations.
- Résoudre le système.
- Vérification (vérifier que le couple trouvé est solution de problème).
- Conclusion.

*** Exemple :** Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.
Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

➔ * *Choix des inconnues* : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

* *Mise en système d'équation* :

- 205 personnes ont visité le musée donc : $x + y = 205$
- La recette a été de 12225 DH alors : $70x + 45y = 12225$

* *Résoudre le système :* On résout le système par la méthode de substitution.

$\begin{cases} x + y = 205 \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 70(205 - y) + 45y = 12225 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} x = 205 - y \\ 14350 - 70y + 45y = 12225 \end{cases}$

Signifie : $\begin{cases} x = 205 - y \\ -70y + 45y = 12225 - 14350 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x = 205 - y \\ -25y = -2125 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 205 - y \\ y = \frac{-2125}{-25} = 85 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x = 205 - 85 = 120 \\ y = 85 \end{cases}$

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 120 + 85 = 205 \\ 70 \times 120 + 45 \times 85 = 8400 + 3825 = 12225 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85.

EXERCICES

Exercice 1 : Le couple $(5,1)$ est-il solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$?

➔ Pour $x = 5$ et $y = 1$: $\begin{cases} 5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7 \\ -3 \times 5 + 8 \times 1 = -15 + 8 = -7 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 5$ et $y = 1$.

Donc le couple $(5,1)$ est solution du système $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$

****

Exercice 2 : Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

➔ 1) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-7y=12 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2y \\ 2x-7y=12 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} x=2y \\ 2\times 2y-7y=12 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2y \\ 4y-7y=12 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2y \\ -3y=12 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2y \\ y=\frac{12}{-3}=-4 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x=2\times(-4)=-8 \\ y=-4 \end{cases}$

Alors le couple $(-8,-4)$ est la solution de ce système.

2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 2(1-y)-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 2-2y-y=2 \\ x=1-y \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} -2y-y=2-2 \\ x=1-y \end{cases}$ donc : $\begin{cases} -3y=0 \\ x=1-y \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y=\frac{0}{-3}=0 \\ x=1-y \end{cases}$ enfin : $\begin{cases} y=0 \\ x=1-0=1 \end{cases}$

Alors le couple $(1{,}0)$ est la solution de ce système.

3) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=4 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2+3y \\ 2x-6y=4 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} x=2+3y \\ 2(2+3y)-6y=4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2+3y \\ 4+6y-6y=4 \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x=2+3y \\ 6y-6y=4-4 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x=2+3y \\ 0y=0 \end{cases}$

Puisqu'on a : $0y=0$ dans l'équation (2).

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

****

Exercice 3 : Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 9x-7y=8 \\ -2x+7y=2 \end{cases}$

➔ 1) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la première équation par **3**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$\begin{cases} 3\times(2x-y)=3\times 3 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ -6x+3y=3 \end{cases}$ donc : $6x+(-6x)-3y+3y=9+3$

c'est-à-dire : $6x-6x-3y+3y=12$, donc : $0x+0y=12$, d'où : $0=12$.

Alors le système n'a pas de solutions.

2) $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la deuxième équation par **(-6)**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

$\begin{cases} 12x+14y=2 \\ -6\times(2x+4y)=-6\times 2 \end{cases}$ signifie : $\begin{cases} 12x+14y=2 \\ -12x-24y=-12 \end{cases}$ donc : $12x+(-12x)+14y+(-24y)=2+(-12)$

c'est-à-dire : $12x-12x+14y-24y=2-12$

d'où : $-10y=-10$

donc : $y=\frac{-10}{-10}=1$

On remplace $\boldsymbol{y}$ par 1 dans la deuxième équation pour trouver $\boldsymbol{x}$.

➔ $2x+4\times 1=2$

signifie : $2x=2-4$

d'où : $2x=-2$

Enfin : $x=\frac{-2}{2}=-1$

Alors le couple (-1,1) est la solution de ce système.

3) $\begin{cases} 9x-7y=8 \\ -2x+7y=2 \end{cases}$ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y.

On obtient : $9x+(-2x)-7y+7y=8+2$, signifie : $9x-2x=10$, d'où : $7x=10$, donc : $x=\frac{10}{7}$.

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

On remplace x par $\frac{10}{7}$ dans la deuxième équation pour trouver y.

➔ $-2\times\frac{10}{7}+7y=2$, signifie : $\frac{-20}{7}+7y=2$, c'est-à-dire : $7y=2+\frac{20}{7}$, d'où : $7y=\frac{14}{7}+\frac{20}{7}=\frac{34}{7}$

donc : $y=\frac{34}{7}\div 7$, signifie : $y=\frac{34}{7}\times\frac{1}{7}$, enfin : $y=\frac{34}{49}$.

Alors le couple $(\frac{10}{7},\frac{34}{49})$ est la solution de ce système.

****

Exercice 4 : Résous graphiquement les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}-x+y+3=0\\2x-y-4=0\end{cases}$; *2)* $\begin{cases}3x+y-1=0\\6x+2y-2=0\end{cases}$; *3)* $\begin{cases}-3x-2y=-3\\6x+4y+1=0\end{cases}$

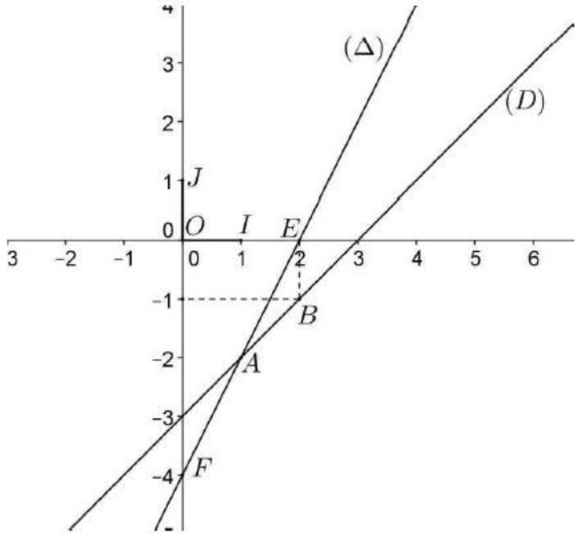
➔ *1)* $\begin{cases}-x+y+3=0\\2x-y-4=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=x-3\\-y=-2x+4\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=x-3\\y=2x-4\end{cases}$

Dans un repère on trace les deux droites (D) d'équation : $y=x-3$,

et (Δ) d'équation : $y=2x-4$.

- Pour (D) : $\begin{cases}x_A=0 \Longrightarrow y_A=x_A-3=0-3=-3\\x_B=1 \Longrightarrow y_B=x_B-3=1-3=-2\end{cases}$

- Pour (Δ) : $\begin{cases}x_E=0 \Longrightarrow y_E=2x_E-4=2\times0-4=0-4=-4\\x_F=1 \Longrightarrow y_B=2x_B-4=2\times1-4=2-4=-2\end{cases}$



Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D) et (Δ).

* Les deux droites (D) et (Δ) se coupent en un point : $A(1,-2)$.

Alors le couple $(1,-2)$ est la solution de ce système.

2) $\begin{cases}3x+y-1=0\\6x+2y-2=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=-3x+1\\2y=-6x+2\end{cases}$

signifie : $\begin{cases}y=-3x+1\\y=-\frac{6}{2}x+\frac{2}{2}\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=-3x+1\\y=-3x+1\end{cases}$

On considère les droites (D) d'équation : $y=-3x+1$, et (Δ) d'équation : $y=-3x+1$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine.

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

3) $\begin{cases}-3x-2y=-3\\6x+4y+1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-2y=3x-3\\4y=-6x-1\end{cases}$ signifie : $\begin{cases}y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=\frac{-6}{4}x-\frac{1}{4}\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}\\y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{4}\end{cases}$

On considère les droites (D) d'équation : $y=\frac{-3}{2}x-\frac{3}{2}$, et (Δ) d'équation : $y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{4}$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur.

Alors le système n'a pas de solutions.

****

Exercice 5 : Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums et des boîtes.

Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH.

Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH.

Quel est le prix d'une boîte ? et quel est le prix d'un album ?

➔ * *Choix des inconnues :* soit x le prix d'une boîte et y le prix d'un album.

* *Mise en système d'équation :* - Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH, donc : $6x+5y=610$.

- Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH, donc : $3x+7y=530$.

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

* *Résoudre le système :* On résout le système par la méthode de la combinaison linéaire.

$\begin{cases} 6x+5y=610 \\ 3x+7y=530 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la deuxième équation par **(-2)**.

On obtient : $\begin{cases} 6x+5y=610 \\ -2\times(3x+7y)=-2\times 530 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 6x+5y=610 \\ -6x-14y=-1060 \end{cases}$

On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer $\boldsymbol{x}$.

Donc : $6x+(-6x)+5y+(-14y)=610+(-1060)$, c'est-à-dire : $6x-6x+5y-14y=610-1060$

Signifie : $-9y=-450$, donc : $y=\frac{-450}{-9}=50$.

On remplace $\boldsymbol{y}$ par 50 dans la première équation pour trouver $\boldsymbol{x}$.

➔ $6x+5\times 50=610$, c'est-à-dire : $6x+250=610$, d'où : $6x=610-250$, donc : $6x=360$, enfin : $x=\frac{360}{6}=60$.

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 6\times 60+5\times 50=360+250=610 \\ 3\times 60+7\times 50=180+350=530 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le prix d'une boîte est 60 DH, et le prix d'un album est 50 DH.

****

Exercice 6 : **1)** Résous le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y=53 \\ 4x+y=49 \end{cases}$

2) Chez un marchand de fruits :

* Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes.

* Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes.

Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

➔ **1)** On résout le système par la méthode de substitution :

$\begin{cases} 3x+2y=53 \\ 4x+y=49 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x+2y=53 \\ y=49-4x \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} 3x+2(49-4x)=53 \\ y=49-4x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} 3x+98-8x=53 \\ y=49-4x \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x-8x=53-98 \\ y=49-4x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} -5x=-45 \\ y=49-4x \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x=\frac{-45}{-5} \\ y=49-4x \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} x=9 \\ y=49-4\times 9 \end{cases}$

enfin : $\begin{cases} x=9 \\ y=49-36=13 \end{cases}$

Alors le couple $(9,13)$ est la solution de ce système.

2) * *Choix des inconnues :* soit x le prix d'un kilogramme de bananes et y le prix d'un kilogramme de pommes.

* *Mise en système d'équation :*

- Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes, donc : $3x+2y=53$.
- Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes, donc : $4x+y=49$.

* *Résoudre le système :* On a : $\begin{cases} 3x+2y=53 \\ 4x+y=49 \end{cases}$, d'après la question précédente on a : $x=9 \text{ et } y=13$.

* *Vérification :* On a : $\begin{cases} 3\times 9+2\times 13=27+26=53 \\ 4\times 9+13=36+13=49 \end{cases}$

* *Conclusion :* Alors le prix d'un kilogramme de bananes est 9 DH et le prix d'un kilogramme de pommes est 13 DH.

ملاحظة : المرجو تدوين الدرس في دفتر الدروس

#خليك_فالدار

www.talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع