

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

12

Objectifs d'apprentissage

- ✍ Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- ✍ Résoudre graphiquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- ✍ Résoudre des problèmes en fonction des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Gestion du temps

🕒 10 heures

Prérequis

- ⊗ Résoudre des équations du premier degré à une inconnue.
- ⊗ Repère dans le plan.
- ⊗ Equation d'une droite.

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

◆ Niveau : 3^{ème} APIC

◆ Matière : Mathématiques

◆ Etablissement : Collège Nahda

I- Système de deux équations du premier degré à deux

inconnues :

* **Définition :** Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ désignent des nombres donnés.}$$

Un couple (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

* **Exemple 1 :** $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

* **Exemple 2 :** Le couple $(3,1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?

Pour $x = 3$ et $y = 1$: $\begin{cases} 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 + 1 = 4 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 3$ et $y = 1$.

Donc le couple $(3,1)$ est solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

II- Résolution du système :

* **Définition :** Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

1) Résoudre algébriquement un système :

a/ Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

Activité 1: Activité : 1 – page : 206

Exercice 1: Le couple $(5,1)$ est-il solution

du système : $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$?

Exercice 2 : Déterminer les nombres réels

a et b sachant que le couple $(3, -2)$ soit

la solution du système : $\begin{cases} ax + 2y = 5 \\ 3x - by = 1 \end{cases}$

Exercice 3 : Résous par la méthode de

substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

* **Exemple :** Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

→ On a : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :

$$\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3 \times (9 + 3x) = -17 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$$

d'où : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 9x = -17 + 27 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = 10 \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \frac{10}{-5} = -2 \end{cases}$

Enfin : $\begin{cases} y = 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Donc le couple $(-2,3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés de l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* **Exemple :** Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaison

linéaire.

→ On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la deuxième par **(-5)**.

$$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ -5 \times (2x + 5y) = -5 \times 1 \end{cases} \text{ on obtient : } \begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ -10x - 25y = -5 \end{cases}$$

* On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

Exercice 4 : Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$

$$10x + (-10x) - 8y + (-25y) = 16 + (-5)$$

* On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y .

$$10x - 10x - 8y - 25y = 16 - 5$$

c'est-à-dire : $-33y = 11$ donc : $y = \frac{11}{-33}$ signifie que : $y = \frac{-1}{3}$.

* On remplace y par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver x .

$$\text{Ici on choisit la 2}^{\text{ème}} \text{ équation et on trouve : } 2x + 5 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$$

$$\text{c'est-à-dire : } 2x - \frac{5}{3} = 1$$

$$2x = 1 + \frac{5}{3} \rightarrow 2x = \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \rightarrow 2x = \frac{8}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \div 2 \rightarrow x = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{8}{6}$$

$$\text{Donc : } x = \frac{4}{3}.$$

Alors le couple $\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ est la solution de ce système.

2) Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé.

La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

* **Exemple :** Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

→ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x , et on obtient :

$$\begin{cases} -y = -4x + 2 \\ -y = -2x - 2 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y = 4x - 2$,

et (D_2) d'équation : $y = 2x + 2$.

$$\text{- Pour } (D_1) : \begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow y_A = 4x_A - 2 = 4 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2 \\ x_B = 1 \Rightarrow y_B = 4x_B - 2 = 4 \times 1 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Exercice 5 : Résous graphiquement les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

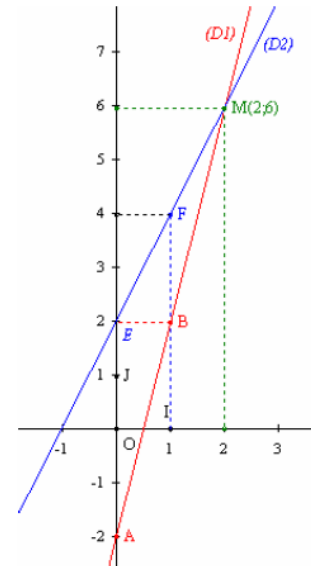
$$3) \begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

- Pour (D_2) : $\begin{cases} x_E = 0 \Rightarrow y_E = 2x_E + 2 = 2 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ x_F = 1 \Rightarrow y_F = 2x_F + 2 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D_1) et (D_2) .

* Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point : $M(2,6)$.

Alors le couple $(2,6)$ est la solution de ce système.



*** Remarque :** - Si les deux droites ont le même coefficient directeur, alors le système n'a pas de solution.

- Si les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine, alors le système a plusieurs solutions.

III- Résolution d'un problème avec un système :

*** Règle :** Les étapes pour résoudre un problème :

- Choisir les inconnues.
- Mise en système d'équations.
- Résoudre le système.
- Vérification (vérifier que le couple trouvé est solution de problème).
- Conclusion.

Activité 2 : Activité : 2 – page : 208

Exercice 6 : Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums et des boîtes. Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH. Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH. Quel est le prix d'une boîte ? et quel est le prix d'un album ?

Exercice 7 : Résous le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$$

2) Chez un marchand de fruits :

- * Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes.
 - * Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes.
- Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

* Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.

Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

→ * Choix des inconnues : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

* Mise en système d'équation :

- 205 personnes ont visité le musée donc : $x + y = 205$

- La recette a été de 12225 DH alors : $70x + 45y = 12225$

* Résoudre le système : On résout le système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$$

$$\text{Signifie : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 70(205 - y) + 45y = 12225 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 14350 - 70y + 45y = 12225 \end{cases}$$

$$\text{Signifie : } \begin{cases} x = 205 - y \\ -70y + 45y = 12225 - 14350 \end{cases}, \text{ alors : } \begin{cases} x = 205 - y \\ -25y = -2125 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 205 - y \\ y = \frac{-2125}{-25} = 85 \end{cases}, \text{ alors : } \begin{cases} x = 205 - 85 = 120 \\ y = 85 \end{cases}$$

$$* \text{ Vérification : On a : } \begin{cases} 120 + 85 = 205 \\ 70 \times 120 + 45 \times 85 = 8400 + 3825 = 12225 \end{cases}$$

* Conclusion : Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85.

Exercice 8 : 1) Résous le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

2) Le prix d'entrée au zoo est de 20 DH pour les enfants et 50 DH pour les adultes.

Un groupe de 5 personnes a payé 160DH.

Détermine le nombre d'enfants et le nombre d'adultes dans ce groupe.