

Devoir Surveillé n°2A

Correction

Troisième

Calcul littéral

Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1.

5 points

On considère l'expression $A(x)$ définie par : $A(x) = 25 - (1 - 2x)^2$.

1. Calculer $A(x)$ pour $x = -1$ ce que l'on notera $A(-1)$.

$$\begin{aligned} A(-1) &= 25 - (1 - 2 \times (-1))^2 \\ &= 25 - (1 + 2)^2 \\ &= 25 - 3^2 \\ A(-1) &= 25 - 9 = \underline{16} \end{aligned}$$

2. Développer $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 25 - (1 - 2x)^2 \\ A(x) &= 25 - (1 - 4x + 4x^2) \\ A(x) &= 25 - 1 + 4x - 4x^2 \\ A(x) &= \underline{-4x^2 + 4x + 24} \end{aligned}$$

3. Factoriser $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 25 - (1 - 2x)^2 \\ A(x) &= 5^2 - (1 - 2x)^2 \\ A(x) &= (5 - (1 - 2x))(5 + (1 - 2x)) \\ A(x) &= (5 - 1 + 2x)(5 + 1 - 2x) \\ A(x) &= \underline{(4 + 2x)(6 - 2x)} \end{aligned}$$

Exercice 2.

5 points

On considère l'expression $B(x)$ définie par : $B(x) = (x + 1)(1 - 4x) - 2(x + 1)(x + 5)$.

1. Développer $B(x)$.

$$\begin{aligned} B(x) &= (x + 1)(1 - 4x) - 2(x + 1)(x + 5) \\ B(x) &= x - 4x^2 + 1 - 4x - 2(x^2 + 5x + x + 5) \\ B(x) &= -4x^2 - 3x + 1 - 2(x^2 + 6x + 5) \\ B(x) &= -4x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 12x - 10 \\ B(x) &= \underline{-6x^2 - 15x - 9} \end{aligned}$$

2. Factoriser $B(x)$.

$$\begin{aligned} B(x) &= (x + 1)(1 - 4x) - 2(x + 1)(x + 5) \\ B(x) &= (x + 1)[(1 - 4x) - 2(x + 5)] \\ B(x) &= (x + 1)[1 - 4x - 2x - 10] \\ B(x) &= \underline{(x + 1)(-6x - 9)} \end{aligned}$$

3. Calculer $B(x)$ pour $x = -1$ ce que l'on notera $B(-1)$.

On peut utiliser l'expression de notre choix, le plus simple est ici avec la forme factorisée mais on peut par sécurité utiliser la forme initiale.

$$B(x) = (x+1)(1-4x) - 2(x+1)(x+5)$$

$$B(-1) = \underbrace{(-1+1)}_0 (1-4 \times (-1)) - 2 \underbrace{(-1+1)}_0 (-1+5)$$

$$B(-1) = 0 \times 5 - 2 \times 0 \times 4$$

$$\underline{B(-1) = 0}$$

Exercice 3. Dans un triangle rectangle**4 points**

Soit ABC un triangle rectangle en A . On désigne par x un nombre positif et on a : $BC = x+7$; $AB = x+2$.

1. Prouver que : $AC^2 = 10x + 45$.

Le triangle ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = (x+7)^2 - (x+2)^2$$

$$AC^2 = x^2 + 14x + 49 - (x^2 + 4x + 4)$$

$$AC^2 = x^2 + 14x + 49 - x^2 - 4x - 4$$

$$AC^2 = \underline{10x + 45}$$

2. Ottavia affirme que l'aire du triangle rectangle ABC en fonction de x est : $\mathcal{A}_{ABC} = 10x^2 + 65x + 90$. Qu'en pensez-vous? Justifier.

L'aire du triangle ABC rectangle en A est égale à la moitié du produit des longueurs des côtés perpendiculaires :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{(x+2) \times \sqrt{10x+45}}{2}$$

Ottavia a donc tort.

On pouvait aussi utiliser un contre-exemple (qui nous servira pour la question suivante).

Si $x = 5$ on a :

$$\begin{cases} AB = 7 \\ BC = 12 \\ AC = \sqrt{10 \times 5 + 45} = \sqrt{95} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{7 \times \sqrt{95}}{2}$$

Or en remplaçant x par 5 dans l'expression d'Ottavia on trouve :

$$10x^2 + 65x + 90 = 10 \times 5^2 + 65 \times 5 + 90 = 665$$

Donc ottavia a bien tort.

3. Donner les dimensions du triangle ABC si $x = 5$ ainsi que son aire. On suppose les mesures données en cm.

Si $x = 5$ on a :

$$\begin{cases} AB = 7 \\ BC = 12 \\ AC = \sqrt{10 \times 5 + 45} = \sqrt{95} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{7 \times \sqrt{95}}{2}$$

Exercice 4. Programme de calcul

6 points

<p>Programme A</p> <ul style="list-style-type: none"> • Choisir un nombre • Soustraire 3 • Calculer le carré du résultat obtenu 	<p>Programme B</p> <ul style="list-style-type: none"> • Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ • Ajouter 7
--	--

1. Corinne choisit le nombre 1 et applique le programme A. Expliquer en détaillant les calculs que le résultat du programme de calcul est 4.

Programme A	
Choix	1
Soustraire 3	$1 - 3 = -2$
Carré du résultat	$(-2)^2 = 4$

2. Tidjane choisit le nombre -5 et applique le programme B. Quel résultat obtient-il?

Programme B	
Choix	-5
Carré	$(-5)^2 = 25$
Ajouter le triple du nombre de départ	$25 + 3 \times (-5) = 25 - 15 = 10$
Ajouter 7	$10 + 7 = 17$

Tidjane va donc obtenir 17 en partant de (-5) avec le programme B.

3. Lina souhaite regrouper le résultat de chaque programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule, copiée ensuite à droite dans les cellules C3 à H3, a-t-elle saisie dans la cellule B3?

	B2								
		\times	\checkmark	f_x	$=(B1-3)^2$				
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3	
2	Résultat du programme A	36	25	16	9	4	1	0	
3	Résultat du programme B	7	5	5	7	11	17	25	

La formule, copiée à droite dans les cellules C3 à H3, saisie dans la cellule B3 est :

$$= B1 \wedge 2 + 3 * B1 + 7 \quad \text{ou} \quad B1 * B1 + 3 * B1 + 7$$

4. Zoé cherche à trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat. Pour cela, elle appelle x le nombre choisi au départ et exprime le résultat de chaque programme de calcul en fonction de x.

4. a. Montrer que le résultat du programme A en fonction de x peut s'écrire sous forme développée et réduite : $x^2 - 6x + 9$.

Programme A	
Choix	x
Soustraire 3	$x - 3$
Carré du résultat	$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

4. b. Écrire le résultat du programme B.

Programme B	
Choix	x
Carré	x^2
Ajouter le triple du nombre de départ	$x^2 + 3x$
Ajouter 7	$x^2 + 3x + 7$

Fin du devoir



Question Bonus

Dans l'exercice 4, existe-t-il un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat? Si oui, lequel?

On cherche si il existe des valeurs de x telles que les deux programmes donnent le même résultat soit :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= x^2 + 3x + 7 \iff -6x - 3x = 7 - 9 \\ &\iff -9x = -2 \\ &\iff x = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Seule la valeur de départ $x = \frac{2}{9}$ donnera le même résultat pour les deux programmes. Ce dernier sera, pour $x = \frac{2}{9}$ dans le programme A :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{9}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{2}{9}\right) + 9 &= \frac{4}{81} - \frac{12 \times 9}{9 \times 9} + \frac{81 \times 9}{81} \\ &= \frac{4 - 108 + 729}{81} \\ &= \boxed{\frac{625}{81}} \end{aligned}$$



Question Bonus

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3

Soit n un entier, la somme de trois entiers consécutifs s'écrit alors :

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

C'est bien un multiple de 3 puisque n est entier.