Devoir Surveillé n°1
Correction

Troisième
Arithmétique
Durée 1 heure - Coeff. 4
Noté sur 20 points

Exercice 1. D'après Brevet — 3 points

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).

$$\begin{aligned} 756 &= 2\times 378 \\ &= 2\times 2\times 189 \\ &= 2\times 2\times 3\times 63 \\ &= 2\times 2\times 3\times 9\times 7 \\ 756 &= \underline{2^2\times 3^3\times 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 441 &= 3\times 147 \\ &= 3\times 3\times 49 \\ 441 &= \underline{3^2\times 7^2} \end{aligned}$$

2. Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.

On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :

$$\begin{cases} 756 = 2^2\times \boxed{3\times 3}\times 3\times \boxed{7} \\ 441 = \boxed{3\times 3\times 7}\times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 756 = \boxed{63}\times 28 \\ 441 = \boxed{63}\times 7 \end{cases} \Longrightarrow \underline{PGCD(441\ ;\ 756) = 63}$$

3. Rendre alors irréductible la fraction $\dfrac{756}{441}$.

On divise numérateur et numérateur de la fraction pour la rendre irréductible :

$$\frac{756}{441} = \frac{756\div 63}{441\div 63} = \boxed{\frac{28}{7}}$$

Exercice 2. — 2 points

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?

Le nombre total de voyageurs est de : $13+154=167$.

Puisque les bus ont 24 places maximum on va effectuer la division euclidienne de 167 par 24 :

$$167 = 24\times 6+23$$

Il faudra donc prendre 7 bus. Avec 6 bus qui seront remplis intégralement et un qui aura 23 passagers pour 24 places.

Exercice 3. Les voitures — 3 points

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes. Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?

On peut affirmer que les voitures se recroiseront sur la ligne de départ après un temps qui sera un multiple commun de 30 et de 36. On peut lister les multiples et ou effectuer les décomposition en facteurs premiers.

Nombre de tours	Voiture A : Multiples de 36	Voiture B : Multiples de 30
1 tour	36	30
2 tours	72	60
3 tours	108	90
4 tours	144	120
5 tours	$\boxed{180}$	150
6 tours	216	$\boxed{180}$

Les voitures se recroiseront sur la ligne de départ toutes les 180 minutes, donc toutes les 3 heures.

Remarque : Ne sachant pas la durée de la course, on ne peut rien affirmer de plus. Si la course est limitée en temps, moins de 3 heures par exemple, elles ne se recroiseront pas sur la ligne de départ.

Exercice 4. Multiple de 3 ? 3 points

Affirmation 1

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.
Notons n le nombre entier naturel choisi au départ.

Étape 1	n
Étape 2	$n+3$
Étape 3	$5\times(n+3)$
Étape 4	$5\times(n+3)-2n$

On peut alors développer le résultat :

$$5\times(n+3)-2n = 5n+15-2n = \underline{3n+15}$$

On veut alors prouver que ce résultat est un multiple de 3, il faut appliquer la définition du cours :

Définition 1 (Multiple et diviseur)

- Un nombre entier a **est un multiple** d'un nombre entier b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que b **est un diviseur de** a ou que a est divisible par b.
- Si l'entier b divise l'entier a il existe donc un entier q tel que : $a = b\times q$.

On cherche alors à écrire le résultat sous la forme 3 fois un entier.

$$3n+15 = 3\times(n+5)$$

Avec $(n+5)$ entier, donc le résultat obtenu est bien un multiple de 3. L'affirmation de Nory est vraie.

Exercice 5. Un problème de dragées (d'après Brevet) 8 points

Leelo et Justin ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1. **Justin propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Chaque corbeille doit avoir la même composition. Combien lui reste-t-il de dragées non utilisées ?**
Par division euclidienne de 3 003 et de 3 731 par 20 on obtient :

$$3\,003 = 20\times150+3 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 20\times186+11$$

Chacune des 20 corbeilles sera donc composée de 150 dragées au chocolat et 186 aux amandes.
Il lui restera alors 3 dragées au chocolat et 11 aux amandes.

2. **Leelo et Justin décident de proposer des ballotins dont la composition est identique sans avoir de reste de dragées.**

2. a. Leelo propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
On ne peut pas faire 90 ballotins sans avoir de reste avec des compositions identiques. En effet, il faudrait pour cela que 90 soit un diviseur commun de 3 003 et de 3 731 ce qui n'est pas le cas :

$$3\,003 = 90\times33+33 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 90\times41+41$$

2. b. Ils se s'accordent pour faire un maximum de ballotins. Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?
Le nombre de ballotin cherché, N, est un diviseur commun de 3 003 et de 3 731. Or on cherche le nombre maximum de ballotins et de ce fait N est le PGCD de 3 003 et de 3 731.
Décomposons les entiers en facteurs premiers et effectuons le produit des facteurs communs :

$$\begin{cases} 3731 = \boxed{7}\times\boxed{13}\times41 \\ 3003 = 3\times\boxed{7}\times11\times\boxed{13} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3731 = \boxed{91}\times41 \\ 3003 = \boxed{91}\times33 \end{cases}$$

Le PGCD de 3 003 et de 3 731 est 91 et le nombre maximal de ballotins est de 91.
Puisque :

$$3\,003 = 91\times33 \quad \text{et} \quad 3\,731 = 91\times41$$

La composition de chacun des 91 ballotins sera de 33 dragées au chocolat et 41 aux amandes.

Fin du devoir