Devoir Surveillé n°9 Correction

Troisième

Probabilités et Volumes

Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 24 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Probabilités : Pondichéry, Avril 2016 — 3 points

Un confiseur veut remplir 50 boîtes. Chaque boîte contient 10 bonbons au chocolat et 8 bonbons au caramel.

1. **Combien doit-il fabriquer de bonbons de chaque sorte ?**
Pour fabriquer 50 boîtes contenant chacune 10 bonbons au chocolat et 8 au caramel, il doit donc fabriquer :

$$50 \times 10 = \underline{500 \text{ bonbons au chocolat}} \quad \text{et} \quad 50 \times 8 = \underline{400 \text{ bonbons au caramel}}.$$

2. **Jules prend au hasard un bonbon dans une boîte. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un bonbon au chocolat ?**
On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages. Dans ce cas, puisqu'il y a 10 bonbons au chocolat dans une boite contenant 18 bonbons en tout, la probabilité qu'il obtienne un bonbon au chocolat est de :

$$\boxed{p = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \approx 0,56}$$

3. **Jim ouvre une autre boîte et mange un bonbon. Gourmand, il en prend sans regarder un deuxième. Est-il plus probable qu'il prenne alors un bonbon au chocolat ou un bonbon au caramel ?**
Il y a deux possibilités, soit Jim a mangé un bonbon au chocolat lors de son premier tirage, soit un au caramel. Il reste alors $18 - 1 = 17$ bonbons dans la boîte.

   - Si c'est un bonbon au chocolat, il reste 9 chocolats et 8 caramels, il y a plus de bonbons au chocolat donc il est plus probable qu'il prenne un bonbon au chocolat (9 chances sur 17) soit

   $$9/17 \approx 0,53 > 0,5$$

   - Si c'est un bonbon au caramel, il reste 10 chocolats et 7 caramels, il y a plus de bonbons au chocolat donc il est plus probable qu'il prenne un bonbon au chocolat (10 chances sur 17) soit

   $$10/17 \approx 0,59 > 0,5$$

   Dans tous les cas, il est plus probable qu'il prenne alors un bonbon au chocolat.

Exercice 2. Probabilités : Pondichéry 2015 — 4 points

Un jeu télévisé propose à des candidats deux épreuves :

- Pour la première épreuve, le candidat est face à 5 portes : une seule porte donne accès à la salle du trésor alors que les 4 autres s'ouvrent sur la salle de consolation.
- Pour la deuxième épreuve, le candidat se retrouve dans une salle face à 8 enveloppes.
Dans la salle du trésor : 1 enveloppe contient 1 000 €, 5 enveloppes contiennent 200 €. Les autres contiennent 100 €.
Dans la salle de consolation : 5 enveloppes contiennent 100 € et les autres sont vides.

Il doit choisir une seule enveloppe et découvre alors le montant qu'il a gagné.

1. **Quelle est la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor ?**
Pour la première épreuve, une seule porte sur cinq donne accès à la salle du trésor donc la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor est :

$$\boxed{p_1 = \frac{1}{5}}$$

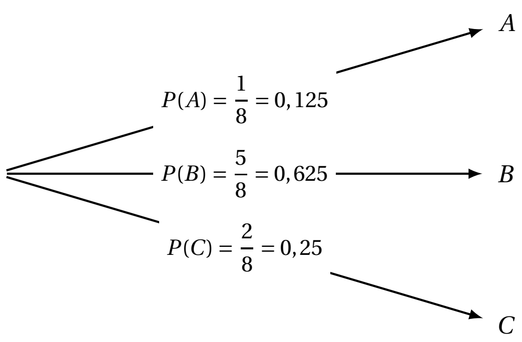
2. **Un candidat se retrouve dans la salle du trésor.**

2. a. Représenter par un schéma la situation.

En notant A l'évènement :« choisir une enveloppe à 1 000 euros », B l'évènement :« choisir une enveloppe à 200 euros » et C l'évènement :« choisir une enveloppe à 100 euros » on a :

- 1 enveloppe sur les 8 contient 1 000 euros donc $P(A) = \dfrac{1}{8} = 0,125$;
- 5 enveloppes sur les 8 contiennent 200 euros donc $P(B) = \dfrac{5}{8} = 0,625$;
- les autres soit 2 enveloppes sur les 8 contiennent 100 euros donc $P(C) = \dfrac{2}{8} = 0,25$.

De ce fait on a :



2. b. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins 200 € ?

Les trois évènements étant incompatibles, la probabilité qu'il gagne au moins 200 euros est la somme des probabilités qu'il gagne 200 euros et celle de gagner 1 000 euros. De ce fait :

$$\boxed{p_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{8} = 0,75}$$

3. Un autre candidat se retrouve dans la salle de consolation. Quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

La salle de consolation contient 8 enveloppes dont 5 contiennent 100 euros et les 3 autres rien. Il a donc 3 possibilités sur 8 de ne rien gagner soit :

$$\boxed{p_3 = \frac{3}{8} = 0,375}$$

Exercice 3. Probabilités — 3 points

1. Guilhem, en week-end dans une station de ski, se trouve tout en haut de la station. Il a en face de lui, deux pistes noires, deux pistes rouges et une piste bleue qui arrivent toutes à un restaurant d'altitude. Bon skieur, il emprunte une piste au hasard.

1. a. Quelle est la probabilité que la piste empruntée soit une piste rouge ?

On suppose être en condition d'équiprobabilité. Guilhem a cinq choix de pistes : $\begin{cases} \text{2 noires} \\ \text{2 rouges} \\ \text{1 bleue} \end{cases}$, et il y a deux pistes rouges parmi les cinq pistes au choix. La probabilité de prendre une piste rouge est donc :

$$\boxed{p_1 = \frac{2}{5} = \underline{0,4}}$$

1. b. À partir du restaurant, sept autres pistes mènent au bas de la station : trois pistes noires, une piste rouge, une piste bleue et deux pistes vertes. Quelle est la probabilité qu'il emprunte alors une piste bleue ?

On suppose encore être en condition d'équiprobabilité. Guilhem a maintenant sept choix de pistes : $\begin{cases} \text{3 noires} \\ \text{1 rouge} \\ \text{1 bleue} \\ \text{2 vertes} \end{cases}$, et il y a une piste bleue parmi les sept pistes au choix. La probabilité de prendre une piste bleue est donc :

$$\boxed{p_2 = \frac{1}{7} \approx \underline{0,143}}$$

2. **Guilhem effectue une nouvelle descente depuis le haut de la station jusqu'en bas dans les mêmes conditions que précédemment. Quelle est la probabilité qu'il enchaîne cette fois-ci deux pistes noires ?**
La probabilité qu'il enchaîne cette fois-ci deux pistes noires est le produit de la probabilité de prendre une piste noire pour se rendre au restaurant d'altitude, par la probabilité de prendre une piste noire depuis se restaurant.

- On a vu lors de la question **(1.)** que $p_1 = \frac{2}{5} = 0,4$.
- À partir du restaurant, il y a 3 noires sur les sept pistes au choix. La probabilité de prendre une noire est donc de $p_3 = \frac{3}{7}$.

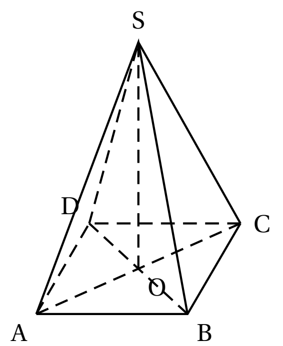
La probabilité qu'il enchaîne deux pistes noires est donc de :

$$p = p_1 \times p_3 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \approx \underline{0,171}$$

Exercice 4. Pyramide : Centres Étrangers 2014 — 4 points

Paul en visite à Paris admire la Pyramide, réalisée en verre feuilleté au centre de la cour intérieure du Louvre. Cette pyramide régulière a :

- pour base un carré ABCD de côté 35 mètres ;
- pour hauteur le segment [SO] de longueur 22 mètres.



Paul a tellement apprécié cette pyramide qu'il achète comme souvenir de sa visite une lampe à huile dont le réservoir en verre est une réduction à l'échelle $\frac{1}{500}$ de la vraie pyramide.
Le mode d'emploi de la lampe précise que, une fois allumée, elle brûle 4 cm^3 d'huile par heure.
Au bout de combien de temps ne restera-t-il plus d'huile dans le réservoir ? Arrondir à l'unité d'heures.

- **Calcul du volume de la pyramide**
Le volume de la pyramide est égal au tiers du produit de l'aire du carré de base, ABCD, par la hauteur SO donc :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{AB^2 \times SO}{3} = \frac{35^2 \times 22}{3} = \frac{26\,950}{3}\ \text{m}^3}$$

- **Calcul du volume de la pyramide réduite**
« Le réservoir en verre est une réduction à l'échelle $\frac{1}{500}$ de la vraie pyramide » donc les distances sont divisées par 500 et, d'après le cours, les aires le sont par 500^2 et les volumes par 500^3.
Le volume de la pyramide réduite est donc :

$$\mathcal{V}' = \frac{\mathcal{V}}{500^3}$$
$$\mathcal{V}' = \frac{26\,950}{3} \times \frac{1}{500^3}\ \text{m}^3$$

Or on a 1 m^3 = 10^6 cm^3

$$\mathcal{V}' = \frac{26\,950}{3} \times \frac{1}{500^3} \times 10^6\ \text{cm}^3$$

$$\boxed{\mathcal{V}' = \frac{1\,078}{15}\ \text{cm}^3}$$

- **Proportionnalité**
« Une fois allumée, elle brûle 4 cm^3 d'huile par heure », donc on peut trouver au bout de combien de temps il ne restera plus d'huile dans le réservoir à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

Volume (cm^3)	4 cm^3	$\dfrac{1\,078}{15}$ cm^3
Temps (heures)	1 h	t ?

Donc le temps cherché est, arrondi à l'unité d'heure :

$$\boxed{t = \dfrac{\dfrac{1\,078}{15} \times 1}{4} = \dfrac{539}{30} \text{ heures} \approx 18 \text{ heures}}$$

Le réservoir sera vide au bout **d'environ 18 heures**.

Exercice 5. Sphère et volume : Asie 2015 — 4 points

1. Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule :

$$\boldsymbol{\mathcal{V} = \dfrac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)}$$

1. a. Prouver que la valeur exacte du volume en cm^3 de l'aquarium est de 1296π.
L'aquarium est une calotte sphérique formé d'une sphère de rayon $r = 10$ cm, et de hauteur $h = 18$ cm. Donc en appliquant la formule donnée on a :

$$\mathcal{V} = \dfrac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)$$
$$\mathcal{V} = \dfrac{\pi}{3} \times 18^2 \times (3 \times 10 - 18)$$
$$\mathcal{V} = \dfrac{\pi}{3} \times 18^2 \times 12$$
$$\mathcal{V} = \dfrac{18^2 \times (3 \times 4) \times \pi}{3}$$
$$\mathcal{V} = 18^2 \times 4 \times \pi$$

$$\boxed{\mathcal{V} = 1296\pi}$$

1. b. Donner la valeur approchée de l'aquarium au litre près.

$$\boxed{\mathcal{V} = 1296\pi \approx 4\,071{,}50 \text{ cm}^3 \approx \underline{4 \text{ L}}}$$

2. On remplit cet aquarium à ras bord, puis on verse la totalité de son contenu dans un autre aquarium parallélépipédique. La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm.
Déterminer la hauteur atteinte par l'eau (on arrondira au cm).
Le volume d'un parallélépipède rectangle est obtenu en faisant le produit de l'aire de sa base par sa hauteur h.
La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm, donc en notant h la hauteur atteinte par l'eau, elle occupera un volume de :

$$V = 15 \times 20 \times h = 300h$$

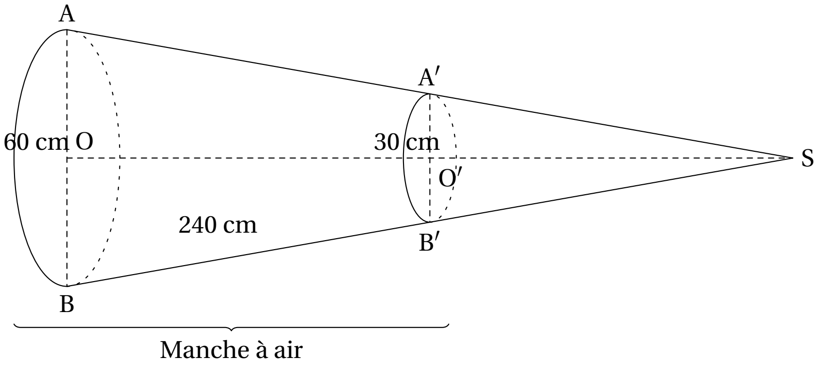
On cherche donc h tel que $V = 4$ L mais attention ici, il faut repasser en cm^3 et en valeur exacte pour respecter la cohérence des unités :

$$V = 300h = 1296\pi \iff h = \dfrac{1296\pi}{300} \approx 13{,}57 \text{ cm}$$

La hauteur atteinte par l'eau, arrondie au cm, est donc de <u>14 cm</u>.

Exercice 6. Cône : Amérique du Nord 2016 — 5 points

Sur l'altiport (aérodrome d'altitude) de la station de ski se trouve une manche à air qui permet de vérifier la direction et la puissance du vent. Cette manche à air à la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu à partir d'un cône auquel on enlève la partie supérieure, après section par un plan parallèle à la base.



On donne : AB = 60 cm, A′B′ = 30 cm, BB′ = 240 cm. O est le centre du disque de la base du grand cône de sommet S. O′ milieu de [OS], est le centre de la section de ce cône par un plan parallèle à la base. B′ appartient à la génératrice [SB] et A′ appartient à la génératrice [SA].

1. **Démontrer que la longueur SB est égale à 480 cm.**
On se place dans le triangle SOB. Les droites (OB) et (O'B') sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à la droite (SO). En outre, le point O' est le milieu du segment [SO], donc d'après le théorème des milieux, le point B' est aussi le milieu du segment [SB].

$$\left\{\begin{array}{l}(OB)//(O'B')\\ O' = \text{mil}[SO]\end{array}\right| \underset{\text{Théorème des milieux}}{\Longrightarrow} B' = \text{mil}[SB]$$

De de ce fait :

$$\boxed{SB = 2\times BB' = 2\times 240 = 480 \text{ cm}}$$

2. **Calculer la longueur SO. On arrondira le résultat au centimètre.**
On se place dans le triangle SOB. Le point O est le milieu du segment [AB] donc $OB = \frac{1}{2}AB = 30$ cm.

- **Données.**
Le triangle SOB est rectangle en O. L'hypoténuse est donc le côté [SB].

- **Le théorème.**
donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$SB^2 = SO^2 + OB^2$$
$$480^2 = SO^2 + 30^2$$

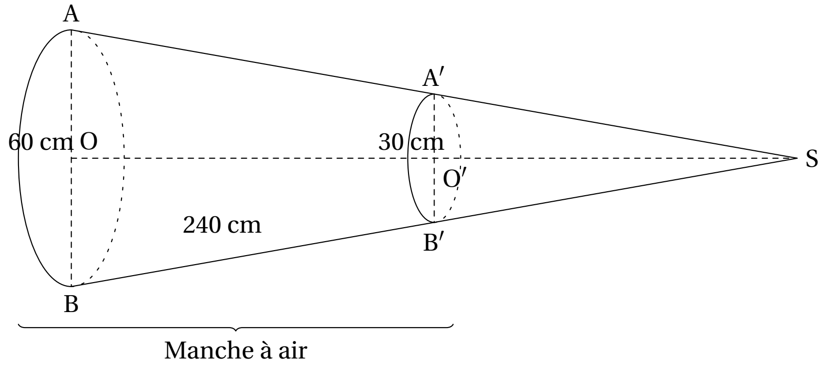
On obtient donc

$$SO^2 = 480^2 - 30^2$$
$$SB^2 = 229\,500$$

- **Conclusion.**
Or puisque SO est une longueur, $SO > 0$ et on a une seule solution possible

$$\boxed{SO = \sqrt{229\,500} \approx 479 \text{ cm à 1 cm près.}}$$

3. Calculer le volume d'air qui se trouve dans la manche à air. On arrondira au centimètre cube.



Le volume de la manche à aire va s'obtenir en effectuant la différence du volume du grand cône et du petit cône. Pour chacun des cônes, on va calculer l'aire des disques de base de rayons respectifs [OB] et [O'B'] puis on appliquera la formule du volume :

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur} \quad \text{et} \quad A_{\text{disque}} = \pi \times \mathrm{R}^2$$

Plus plus de rigueur, on va garder les valeurs exactes jusqu'au bout.

- **Volume du grand cône**.

$$A_{(\text{disque de rayon } OB)} = \pi \times OB^2 = 30^2\ \pi\ \text{ cm}^2$$

$$V_{(\text{Grand Cône})} = \frac{1}{3} \times A_{(\text{disque de rayon } OB)} \times SO$$

$$\underline{V_{(\text{Grand Cône})}} = \frac{1}{3} \times \left(30^2\ \pi\right) \times \sqrt{229\,500} \approx 451\,504{,}90\ \text{ cm}^3$$

- **Volume du petit cône**.
On a ici O' milieu du segment [SO] et O' milieu du segment [A'B'] d'où :

$$O'B' = \frac{1}{2} A'B' = 15\ \text{ cm} \quad \text{et} \quad SO' = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2}\sqrt{229\,500}$$

Donc :

$$A_{(\text{disque de rayon } O'B')} = \pi \times O'B'^2 = 15^2\ \pi\ \text{ cm}^2$$

$$V_{(\text{Petit Cône})} = \frac{1}{3} \times A_{(\text{disque de rayon } O'B')} \times SO'$$

$$\underline{V_{(\text{Petit Cône})}} = \frac{1}{3} \times \left(15^2\ \pi\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{229\,500} \approx 56\,438{,}11\ \text{ cm}^3$$

- **Volume de la manche à aire**.

$$V = V_{(\text{Grand Cône})} - V_{(\text{Petit Cône})}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \left(30^2\ \pi\right) \times \sqrt{229\,500} - \frac{1}{3} \times \left(15^2\ \pi\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{229\,500}$$

Donc on obtient arrondi au centimètre cube :

$$\boxed{V \approx 395\,066\ \text{cm}^3}$$

Fin du devoir