Chapitre 14

Calculs numériques

I – Bilan sur les nombres

1. Vocabulaire des différents types de nombres

Définitions

- **Les nombres entiers : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule.** **Par exemple :** $0; 1; 2; 354; 2017; -5; -487; \dots$
- **Les nombres décimaux : ce sont les nombres avec une virgule et dont le nombres de chiffres après la virgule est limité. Par exemple :** $4,5; 23,7891; -6,9; -7841,63; \dots$
- **Les nombres rationnels : ce sont ceux qui s'écrivent sous forme de fraction, c'est à dire le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers. Par exemple :** $\frac{4}{3}; \frac{5}{11}; \frac{120}{13}; -\frac{1}{3}; \dots$
- **Les nombres irrationnels : ce sont ceux qui ne font pas parties des catégories précédentes.** **Par exemple :** $\pi, \sqrt{2}; -\sqrt{7}; \dots$

Propriété

Une fraction est avant tout une division.

Une conséquence directe de cette propriété est que certains nombres appartiennent à différentes catégorie :

- $\frac{2}{4} = 2 \div 4 = 0,5$ donc $\frac{2}{4}$ est un nombre décimal écrit sous forme fractionnaire.
- $4,3 = 43 \div 10 = \frac{43}{10}$ donc 4,3 est un nombre décimal et rationnel.

Remarque

Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux et tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels.

Exemples :

$4 = 4,000; 25 = 25,000; \dots$ | $1,5 = \frac{15}{10}; 153,47 = \frac{153,47}{100}; \dots$ | $5 = \frac{5}{1}; 871 = \frac{871}{1}; \dots$

Oral :	En classe :	À la maison :
–	1 p. 243	2, 3, 4 p. 243

2. Priorités opératoires

Propriété : « ordre des priorités »

$$\boxed{(\ )} \longrightarrow \boxed{\times / \div \ \longrightarrow} \longrightarrow \boxed{+ / - \ \longrightarrow}$$

① ② ③

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} 8-14+(-5)\times 3 &= 8-14+\underbrace{(-5)\times 3} \longleftarrow \text{on commence par la multiplication} \\ &= \underbrace{8-14}+(-15) \longleftarrow \text{on effectue les calculs restants dans l'ordre} \\ &= (-6)+(-15) \\ &= (-21) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} 5-6\times((-7)+11)+3 &= 5-6\times\left(\underbrace{(-7)+11}\right)+3 \\ &= 5-\underbrace{6\quad\times 4}+3 \\ &= \underbrace{5\;-\;24}+3 \\ &= \underbrace{-19+3} \\ &= -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4\times 3+(-11)}{10+2\times(-4)} &= \frac{12+(-11)}{10+(-8)} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 1\div 2 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Oral :	En classe :	À la maison :
–	71, 73 p. 18	72, 74, 75, 76, 77 p. 18

3. Les nombres entiers

Définitions

La division euclidienne de 842 par 24 est :

$$\begin{array}{r|l} 8\,4\,2 & 24 \\ \cline{2-2} -\underline{7\,2} & 35 \\ 1\,2\,2 & \\ -\underline{1\,2\,2} & \\ 2 & \end{array}$$

Dividende → 842 ; **Diviseur** → 24 ; **Quotient** → 35 ; **Reste** → 2

On peut alors écrire l'égalité :

$842 = 24 \times 35 + 2 \longleftarrow$ **dividende = diviseur × quotient + reste**

Définition

Si un nombre *b* se trouve dans la table de multiplication d'un nombre *a*, alors on peut dire que :

- ***a* est un diviseur du nombre *b*,**
- ***b* est divisible par *a*,**
- ***b* est un multiple du nombre *a*.**

Dans ce cas, la division de *b* par *a* donne un reste nul (division euclidienne) ou un quotient entier (division classique).

Exemples : $56 \div 7 = 8$, *comme* 8 *est un nombre entier on peut affirmer que* 7 *est un diviseur de* 56.

$25 \div 2 = 12,5$, *comme* 12, 5 *n'est pas un nombre entier on peut affirmer que* 2 *n'est pas un diviseur de* 25.

$4 \times 11 = 44$, *donc* 44 *est un multiple de* 4.

$6 \times 5 = 30$, *donc* 30 *est un multiple de* 6.

Oral :	En classe :	À la maison :
–	5 p. 243	6, 7, 8 p. 243

Propriété : critères de divisibilité

- Un nombre entier est divisible par 2, s'il est pair (son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8).
- Un nombre entier est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre entier est divisible par 10, si son chiffre des unités est 0.

Exemple 1 : Ces critères nous évitent d'utiliser la calculatrice :

- *129 n'est divisible par 2 car il se termine par 9.*
- *129 n'est divisible par 5 car il se termine pas par 0 ou 5.*
- *129 est divisible par 3 car* $1 + 2 + 9 = 12$ *et* $12 \div 3 = 4$
- *129 n'est divisible par 9 car* $1 + 2 + 9 = 12$ *et 12 n'est pas dans la table de 9.*
- *129 n'est divisible par 10 car il ne se termine par 0.*

Exemple 2 : 1356 est divisible par 2, par 3 et par 5 car :

- *1356 se termine par 6, donc il est divisible par 2.*
- *1356 se termine par 5, donc il est divisible par 5.*
- $1 + 3 + 5 + 6 = 15$ *et* $15 \div 3 = 5$*, donc il est divisible par 3.*

II – Puissances

1. Définitions et formules

Définition

a est nombre non nul et n un nombre entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n\text{fois}}.$$

Exemples : La puissance 2 se lit « au carré » et la puissance 3 « au cube » :

$$5^2 = \underbrace{5 \times 5}_{2\text{ fois}} \quad ; \quad (-4)^3 = \underbrace{(-4) \times (-4) \times (-4)}_{3\text{ fois}} \quad ; \quad (-7)^4 = \underbrace{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}_{4\text{ fois}} \quad ; \quad \ldots$$

Définition

a est nombre non nul et n un nombre entier positif. Alors :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemples :

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad ; \quad 12^{-3} = \frac{1}{12^3} \quad ; \quad (-2)^{-12} = \frac{1}{(-2)^{12}}$$

Oral : 57 p. 250	En classe : –	À la maison : 58, 59 p. 250

Propriété

a est nombre non nul.

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^1 = a.$$

Exemples :

$5^0 = 1 \qquad 2,3^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \qquad 7^1 = 7 \qquad 8,95^1 = 8,95$

Propriété : formules

a et *b* sont des nombres non nuls ; *n* et *m* sont des nombres entiers relatifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m\times n} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemples :

$$\begin{aligned}
2^5 \times 2^3 &= 2^{5+3} = 2^8 \\
\frac{2^5}{2^3} &= 2^{5-3} = 2^2 \\
(7 \times 8)^3 &= 7^3 \times 8^3 \\
3^2 + 5^2 &= 3^2 + 5^2 \neq 8^2 \quad \textit{On ne peut pas calculer davantage} \\
(4^5)^{-2} &= 4^{5\times(-2)} = 4^{-10} \\
6^2 \times 6^{-5} &= 6^{2+(-5)} = 6^{-3} \\
4^2 \times 5^3 &= \quad \textit{On ne peut pas calculer} \\
((-5)^7)^8 &= (-5)^{7\times 8} = (-5)^{56} \\
\frac{6^2}{6^{-5}} &= 6^{2-(-5)} = 6^7 \\
5^3 - 5^2 &= 5^3 - 5^2 \neq 5^5 \quad \textit{On ne peut pas calculer}
\end{aligned}$$

Oral : 10, 11, 12 + 21p. 14	**En classe :** 32, 33 p. 15	**À la maison :** 34, 35, 36, 37 p. 15

2. Écriture scientifique

Définition

Une puissance de 10 est un nombre obtenu en élevant 10 à la puissance *n*, *n* étant un entier relatif :

- $10^3 = 1\,000$
- $10^5 = 10\,000$
- $10^8 = 100\,000\,000$
- $10^{-2} = 0,01$
- $10^{-4} = 0,000\,1$
- $10^{-6} = 0,000\,001$

On rappelle que si l'on a 10^n (avec *n* positif), alors il y a autant de zéros *après* le "1" que le nombre *n*. Par contre, si l'on a 10^{-n} (donc avec *n* est négatif), alors il y a autant de zéros *avant* le "1" et on place une virgule après le premier zéro.

Oral : 13 + 22, 23, 24, 25 p. 14	**En classe :** 42 p. 15	**À la maison :** 43, 44, 45, 46, 47 p. 15

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre est une écriture de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre compris entre 1 et 10 (mais différent de 10 : donc $1 \leqslant a < 10$) et n un nombre entier.

Exemples :

- $4,78 \times 10^3$ *est une écriture scientifique car* $4,78$ *est compris entre 1 et 10 et* 3 *est un nombre entier.*
- $2,159 \times 10^{-5}$ *est une écriture scientifique car* $2,159$ *est compris entre 1 et 10 et* -5 *est un nombre entier.*
- $45,9 \times 10^2$ *n'est pas une écriture scientifique car* $45,9$ *n'est pas compris entre 1 et 10.*
- $0,9 \times 10^5$ *n'est pas une écriture scientifique car* $0,9$ *n'est pas compris entre 1 et 10.*
- $2,5 \times 3^{10}$ *n'est pas une écriture scientifique car il n'y a pas de puissance de 10.*

Méthode (DÉTERMINER L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE D'UN NOMBRE)

Déterminer l'écriture scientifique de 478,5.

Au brouillon ou dans ma tête :

1. **On écrit le nombre *sans sa virgule* : 4 785.**
2. **On place la virgule pour obtenir un nombre entre 1 et 10 : $4,785$.**
3. **On compte de combien on a déplacé la virgule par rapport au nombre de départ (ici 2), ce qui nous donne la partie numérique de la puissance : $4,785 \times 10^{\cdots 2}$**
4. **On vérifie s'il faut mettre un "moins" en puissance : si le nombre de départ est inférieur à 1, alors il faut mettre un "moins". Ici ce n'est pas le cas (car $478,5 > 1$), donc pas besoin de moins.**

Sur ma feuille :

$$478,5 = 4,78 \times 10^2.$$

À la calculatrice

À la calculatrice, on peut vérifier les écritures scientifique de tout nombre ou de tout calcul.

- **Pour mettre le mode écriture scientifique sur la calculatrice** :

  [quitter mode] [▼] [▶] [entrer], puis [2nde] [quitter mode] pour quitter l'écran.

  L'affichage indique "SCI", prouvant que le mode est activé. Il suffit alors de taper un nombre ou un calcul suivi de [entrer] pour que la calculatrice donne le résultat sous forme d'une écriture scientifique.

- **Pour enlever le mode écriture scientifique sur la calculatrice** :

  [quitter mode] [▼] [entrer], puis [2nde] [quitter mode] pour quitter l'écran.

  Le "SCI" sur l'écran disparait, prouvant bien qu'on est revenu en mode normal.

Oral :	En classe :	À la maison :
–	62 p. 17	63 p. 17

Exemples 1 :

$$\begin{aligned}
31\,200 &= 3,12 \times 10^4 \\
253,47 &= 2,534\,7 \times 10^2 \\
0,000\,84 &= 8,4 \times 10^{-4} \\
0,0201\,7 &= 2,017 \times 10^{-2} \\
100,001 &= 1,000\,01 \times 10^2 \\
1,234 &= 1,234 \times 10^0
\end{aligned}$$

Exemple 2 : Déterminer l'écriture scientifique de $A = 458,6 \times 10^5$

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{458,6}\times 10^5 \\ &= 4,586 \times \underbrace{10^2 \times 10^5} \quad \longleftarrow \textit{on détermine l'écriture scientifique du nombre} \\ &= 4,586 \times 10^{2+5} \quad \longleftarrow \textit{on utilise les formules sur les puissances} \\ &= 4,586 \times 10^7. \end{aligned}$$

Exemple 3 : Déterminer l'écriture scientifique de $A = 457,8 \times \dfrac{10^7}{10^2}$

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= 457,8 \times \frac{10^7}{10^2} \\ A &= 4,578 \times 10^2 \times 10^5 \\ A &= 4,578 \times 10^7 \end{aligned}$$

Exemple 4 : Déterminer l'écriture scientifique de $B = 521 \times \dfrac{10^2 \times 10^3}{10^{-4} \times 10^{-6}}$

Réponse :

$$\begin{aligned} B &= 521 \times \frac{10^2 \times 10^3}{10^{-4} \times 10^{-6}} \\ B &= 5,21 \times 10^2 \times \frac{10^5}{10^{-10}} \\ B &= 5,21 \times 10^2 \times 10^{15} \\ B &= 5,21 \times 10^{17} \end{aligned}$$

Oral : 17, 18, 19, 20 p. 14	En classe : 2, 7, 9 p. 13 + 64 p. 17	À la maison : 3, 4, 5, 6, 8 p. 13 + 65, 67 p. 17

III – Racines carrées

1. Définitions

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a.

Exemple : $\sqrt{16} = 4$ *car* $4^2 = 16$.

Remarque

La racine carrée d'un négatif ne sera pas vue au collège. La calculatrice affiche même une erreur en cas de calcul d'une racine carrée d'un nombre négatif !

Propriété

a est un nombre positif. Alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt{2,4^2} = 2,4 \qquad \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \qquad \left(\sqrt{3,8}\right)^2 = 3,8 \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

■ **EXERCICE :** Développer les expressions $(3+\sqrt{2})^2$; $(2\sqrt{5}-4)^2$ et $(6\sqrt{2}+\sqrt{7})(6\sqrt{2}-\sqrt{7})$.

Solution : On applique dans l'ordre les identités remarquables 1, 2 puis 3 :

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{2})^2 &= 3^2+2\times3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\\ &= 9+6\sqrt{2}+2\\ &= 11+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\sqrt{5}-4)^2 &= (2\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times4+4^2\\ &= 4\times5-8\sqrt{5}+16\\ &= 36-8\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6\sqrt{2}+\sqrt{7})(6\sqrt{2}-\sqrt{7}) &= (6\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2\\ &= 6^2\times(\sqrt{2})^2-7\\ &= 36\times2-7\\ &= 72-7\\ &= 65.\end{aligned}$$

2. Opérations sur les racines carrées

Propriété

***a* et *b* sont des nombres positifs non nuls.**

$$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

- $\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{12\times3} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{5}\times\sqrt{4} = \sqrt{5\times4} = \sqrt{20}$
- $\sqrt{14} = \sqrt{7\times2} = \sqrt{7}\times\sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$
- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

3. Simplifications

Méthode (Écrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$)

Pour écrire $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible, on procède de la manière suivante :

1. **On décompose le nombre sous la racine carrée en un produit/quotient dont l'un des nombres est un carré parfait (par exemple, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ; ici $50 = 25 \times 2$).**
2. **On utilise les formules sur les racines carrés pour séparer la racine en deux.**
3. **On simplifie la racine carrée du nombre carré !**

Par exemple : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Exemple : Écrire $\sqrt{63}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}.$$

Remarque

On ne peut pas calculer des nombres avec des racines carrées différentes (par exemple $3\sqrt{2} + 5\sqrt{7} \neq 8\sqrt{9}$!) De temps en temps, il faudra donc décomposer chaque racine carrée afin de faire apparaître *le même* carré parfait.

Exemple : Écrire $A = 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombes entiers et b le plus petit possible.

Réponse :

$$\begin{aligned}
A &= 2\sqrt{24} + 3\sqrt{216} - 10\sqrt{6} \\
&= 2\sqrt{4 \times 6} + 3\sqrt{36 \times 6} - 10\sqrt{6} \\
&= 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} + 3 \times \sqrt{6^2} \times \sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 2 \times 2\sqrt{6} + 3 \times 6\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 4\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 10\sqrt{6} \\
&= 12\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Problème ouvert : 104 p. 22