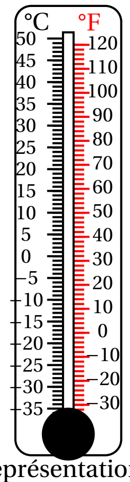
Devoir Surveillé n°5

Troisième

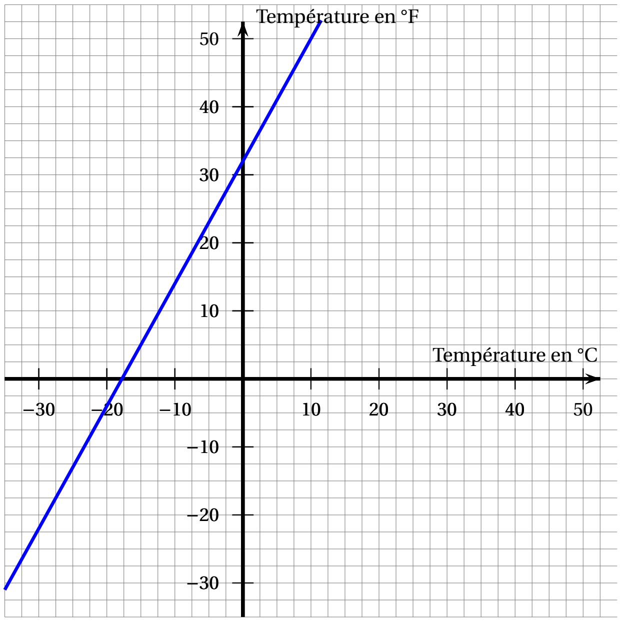
Fonctions, Fonctions linéaires et pourcentages
Durée 1.25 heure - Coeff. 5
Noté sur 21 points

L'usage de la calculatrice *__est autorisé__*. *La maitrise de la langue et la présentation rapporteront 1 point*

Exercice 1. Celsius et Fahrenheit — 6 points



Représentation 1



Représentation 2

1. **En vous appuyant sur les représentations précédentes, déterminer s'il y a proportionnalité entre la température en degré Celsius et la température en degré Fahrenheit. Justifier votre réponse.**
   Il n'y a pas proportionnalité entre la température en degré Celsius et la température en degré Fahrenheit car le graphique représentant la température en degré Fahrenheit en fonction de la température en degré Celsius est une droite mais qui ne passe pas par l'origine du repère.

2. *Soit f la fonction qui à une température x en degré Celsius associe la température $f(x)$ en degré Fahrenheit correspondante. On propose trois expressions de $f(x)$:*

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$f(x) = x + 32$	$f(x) = 1,8x + 32$	$f(x) = 2x + 30$

« ***Les propositions 1 et 3 ne peuvent pas être correctes. C'est donc la proposition 2 qui convient.*** ». **Justifier cela.**

- __Proposition 3__ : Avec la proposition 3, $f(0) = 30$, or d'après la représentation 1, on sait que l'image de 0 est 32. Il faut donc choisir entre les propositions 1 et 2.
- __Proposition 1__ : On lit avec la représentation graphique (rep. 2) que on sait que l'image de 10 est 50 , or la proposition 1 donne 42 pour image de 10.
- __Proposition 2__ : Seule la proposition 2 peut donc convenir.

3. **On considère la fonction f définie par $f(x) = 1,8x + 32$. Calculer $f(10)$ et $f(-40)$.**

$$f(10) = 1,8 \times 10 + 32 = 18 + 32 = \underline{50}$$

$$f(-40) = 1,8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = \underline{-40}$$

4. **Existe-t-il une valeur pour laquelle la température exprimée en degré Celsius est égale à la température exprimée en degré Fahrenheit ? Justifier votre réponse.**
On cherche x, la valeur en degré Celsius, telle que : $T_{\text{degré Celsius}} = T_{\text{degré Fahrenheit}}$, soit

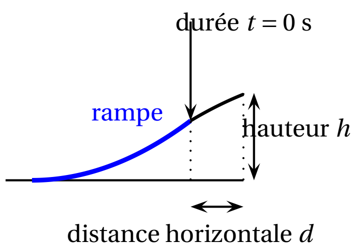
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = 1,8x + 32 \\ &\iff x - 1,8x = 32 \\ &\iff -0,8x = 32 \\ &\iff x = \frac{32}{-0,8} = \underline{-40} \end{aligned}$$

On a donc : <u>−40°C correspond à −40°F</u>.

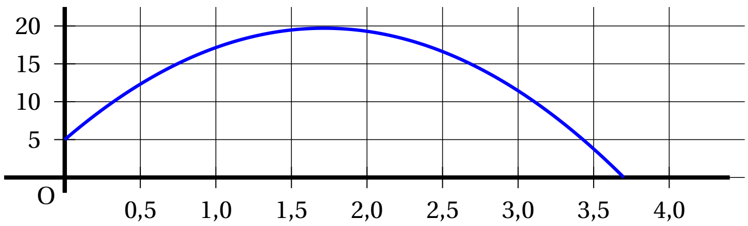
Exercice 2. Saut en moto — 5 points

Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe.
On note t la durée (en secondes) de ce saut.
La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$$h : t \longmapsto (-5t - 1,35)(t - 3,7)$$



Voici la courbe représentative de cette fonction h.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier en utilisant soit le graphique soit des calculs.

1. **D'après la courbe, la hauteur est proportionnelle au temps**.
La courbe représentative de la fonction n'est pas une droite qui passe par l'origine du repère, donc la hauteur n'est pas proportionnelle au temps

2. **En développant et en réduisant l'expression de h on obtient $h(t) = -5t^2 - 19,85t - 4,995$**

   - **Par le calcul**.
   Pour tout t réel de l'intervalle d'étude on a par développement :

   $$\begin{aligned} h(t) = (-5t - 1,35)(t - 3,7) &= -5t^2 + 5t \times 3,7 - 1,3t + 1,35 \times 3,7 \\ &= -5t^2 + 18,5t - 1,35t + 4,995 \\ &= \underline{-5t^2 + 17,15t + 4,955} \end{aligned}$$

   L'affirmation <u>1 est donc fausse</u>.

   - **Par une lecture graphique (et calcul)**.
   Une lecture graphique permettait aussi de répondre à la question, il suffisait de lire l'image de 0 par h, on avait alors juste une valeur approchée du résultat mais cela était suffisant :

   $$h(0) \approx 5 > 0$$

   Or l'image de 0 par la fonction proposée donne une valeur négative, ce qui n'est pas possible.
   En effet pour $x = 0$ on a :

   $$\begin{aligned} -5t^2 - 19,85t - 4,995 &= 5 \times 0^2 - 19,85 \times 0 - 4,995 \\ &= -4,999 < 0 \end{aligned}$$

3. **Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.**
La hauteur de Gaëtan lorsqu'il quitte la rampe est donnée par $h(0)$, l'image de 0 par la fonction h.

- **Par le calcul**.
  Or on a facilement à l'aide de l'expression initiale de h

$$h(0) = (-5\times 0 - 1,35)(0-3,7)$$
$$h(0) = -1,35\times(-3,7)$$
$$h(0) = 4,955 \neq 3,8$$

  L'affirmation 2 est donc fausse.

  Remarque : On pouvait bien sûr utiliser la forme développée, cela était plus rapide mais dépendant du résultat du calcul précédent, il y a toujours un risque !

- **Par une lecture graphique**.
  Une lecture graphique permettait aussi de répondre à la question, il suffisait de lire l'image de 0 par h, on avait alors juste une valeur approchée du résultat mais cela était suffisant :

$$h(0) \approx 5 \neq 3,8$$

4. Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.

La durée du saut correspond à l'instant où la hauteur $h(t)$ vaut 0. Cela correspond à l'instant où la moto touche le sol donc à l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. C'est aussi à une solution positive de l'équation $h(t) = 0$.

- **Par une lecture graphique**.
  Sur le graphique, on peut lire une valeur approchée de l'abscisse du point B, point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses qui est une solution de l'équation $h(t) = 0$ ou aussi un antécédent de 0 par h. On obtient

$$x_B \approx 3,7$$

  La courbe coupe l'axe des abscisses avant 4, la moto touche le sol avant 4 secondes, donc le saut dure moins de 4 secondes. L'affirmation 3 est donc vraie.

- **Par le calcul, méthode 1**.
  On va chercher à résoudre l'équation $h(t) = 0$, pour t réel positif.

Théorème 1

Un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$h(t) = 0 \Longleftrightarrow (-5t - 1,35)(t-3,7) = 0$$

  C'est une équation produit nul, donc par théorème :

$$h(t) = 0 \Longleftrightarrow \left(-5t - 1,35 = 0\right) \text{ ou } \left(t - 3,7 = 0\right)$$
$$h(t) = 0 \Longleftrightarrow \left(t = \frac{1,35}{-5} = -0,27\right) \text{ ou } \left(t = 3,7\right)$$

  Les solutions de l'équation sont donc : $\boxed{-0,27 \text{ et } 3,7}$.

  La seule solution possible cependant est la solution positive car t est une durée exprimée en secondes. La durée du saut est donc de 3,7 s, elle est bien inférieure à 4 s, l'affirmation 3 est bien correcte.

- **Par le calcul, méthode 2**.
  On pouvait aussi calculer l'image de 4 par la fonction h qui n'est en fait définie que pour t réel positif tel que $h(t) \geq 0$. On a :

$$h(4) = (-5\times 4 - 1,35)(4-3,7) = -6,405 < 0$$

  Puisque $h(4) < 0$, la durée du saut est bien inférieur à 4 secondes.

5. Le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction *h*.

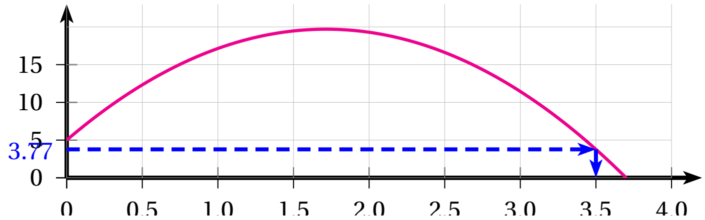
Affirmer que 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h c'est dire que l'image de 3,5 par h est 3,77. On va donc déterminer cette image.

- **Par le calcul.**
  On calcul l'image de $3,5$ par h pour vérifier si c'est bien $3,77$.

$$h(3,5) = (-5 \times 3,5 - 1,35)(3,5 - 3,7)$$
$$h(3,5) = -18,83 \times (-0,2)$$
$$h(3,5) = \underline{3,77}$$

  L'image de $3,5$ par h est bien $h(3,5) = 3,77$ donc $3,5$ est un antécédent du nombre $3,77$ par la fonction h. L'affirmation 4 est vraie.

- **Par une lecture graphique.**



  L'image de $3,5$ par h est bien $h(3,5) = 3,77$ donc $3,5$ est un antécédent du nombre $3,77$ par la fonction h. L'affirmation 4 est vraie.

6. Gaetan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

- **Par le calcul.**
  On peut par exemple calculer les images de 1,5 de 1,6 et 1,7 pour montrer que la hauteur maximale est obtenue après 1,5 seconde. La calculatrice donne :

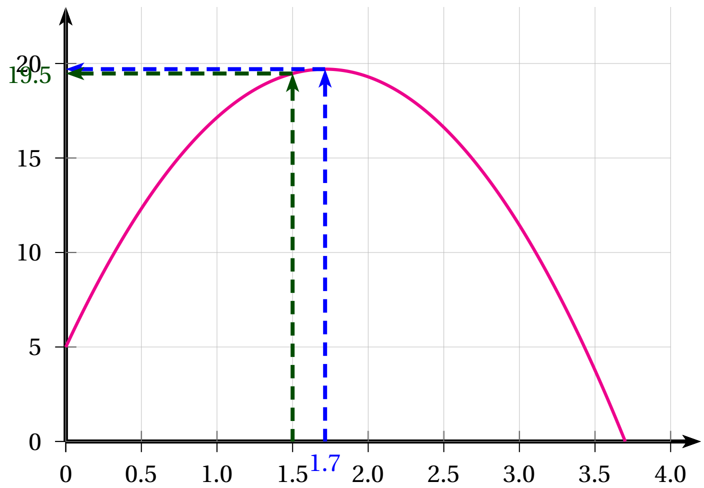
t	1,5	1,6	1,7
$h(t)$	$h(1,5) = 19,47$	$h(1,6) = 19,635$	$h(1,7) = 19,7$

  On a par exemple :

$$h(1,7) = 19,7 > h(1,5) = 19,47$$

  L'affirmation 5 est fausse.

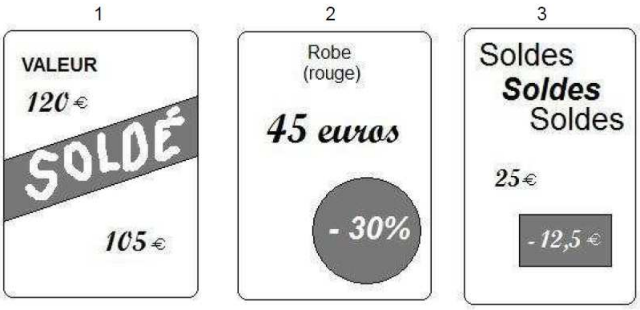
- **Par une lecture graphique.**



  La hauteur maximale est visiblement obtenue après 1,5 seconde sur le graphique, à environ 1,7 seconde. L'image de 1,5 est clairement inférieure à l'image de 1,7
  L'affirmation 5 est fausse.

  Remarque : La valeur exacte est en fait $t = 1,715$ seconde et la hauteur maximale est de 19,7011 m.

Exercice 3. C'est les Soldes ! 4 points



Propriété 1 (Les pourcentages et les évolution en pourcentage)

Soit x un nombre strictement positif.

1. Prendre x% d'un nombre c'est le multiplier par $\dfrac{x}{100}$.

2. Augmenter une quantité v_i de x % c'est la multiplier par $k = (1 + x\ \%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1+x\ \%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1+x\ \%)"] \end{tikzcd}$$

3. Diminuer une quantité v_i de x % c'est la multiplier par $k = (1 - x\ \%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1-x\ \%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1-x\ \%)"] \end{tikzcd}$$

4. Pour trouver directement le taux d'évolution en pourcentage (qui peut être négatif) :

$$\boxed{t\% = \frac{v_f - v_i}{v_i}}$$

1. Quelle est le plus fort pourcentage de remise ?

- Pour l'étiquette 1, la remise est de :

$$120€ - 105€ = 15€$$

Ce qui correspond à un pourcentage du prix initial (120€) de :

$$\frac{15}{120} = 0,125 \text{ soit } \underline{-12,5\%}$$

> Remarque :
> On peut retrouver cela directement en appliquant la formule du cours :
>
> $$t\% = \frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{105-120}{120} = \frac{-15}{120} = -0,125 = \underline{-12,5\%}$$

- Pour l'étiquette 2, Le pourcentage de remise est de $\underline{-30\%}$
- Pour l'étiquette 3, la remise est de 12,5 euros, pour un prix initial de 25 euros. Ce qui correspond à un pourcentage du prix initial de :

$$\frac{12,5}{25} = 0,5 \text{ soit } \underline{-50\%}$$

Le plus fort pourcentage de remise est donc celui de l'étiquette 3, soit -50%.

2. Est-ce que la plus forte remise en euros est la plus forte en pourcentage ?

- Pour l'étiquette 1, la remise est de 15 euros.
- Pour l'étiquette 2, la remise est de 30% du prix initial de 45 euros soit :

$$45€ \times \frac{30}{100} = \underline{13,5€}$$

- Pour l'étiquette 3, la remise est de 12,5 euros.

Donc, la plus forte remise en euros $(-15€)$ sur l'étiquette 1 n' est la plus forte en pourcentage (-50%) sur l'étiquette 3.

Exercice 4. Tous au ski ... avec Melchior ! **5 points**

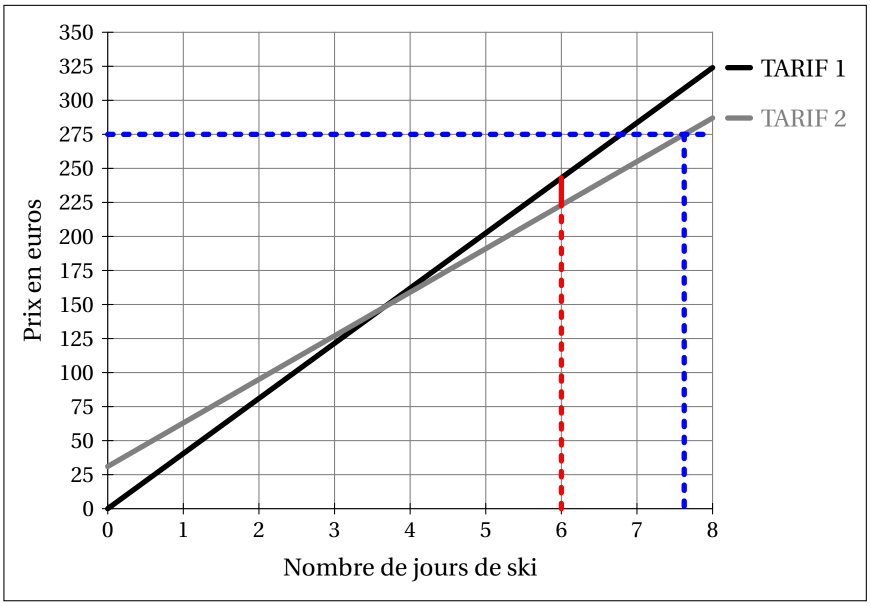
Une station de ski propose deux tarifs de forfaits. Tarif 1 : le forfait « journée » à 40,50 € et Tarif 2 : Achat d'une carte club SKI sur Internet pour 31 € et donnant droit au forfait « journée » à 32 €.

1. **Déterminer par le calcul : le tarif le plus intéressant pour Melchior qui compte skier deux journées.**

   - **Avec le tarif 1**.
     Le forfait 1 est le forfait « journée » à 40,50 €donc il va payer pour 2 journées :
     $$p_1 = 2 \times 40,50 \text{ €} = \underline{81 \text{ €}}$$
   - **Avec le tarif 2**.
     Avec le forfait 2, il va payer la carte club de 31 euro plus 32 euros par jour soit :
     $$p_2 = 31 + 2 \times 32 \text{ €} = \underline{95 \text{ €}}$$

   Le tarif le plus intéressant pour Melchior qui compte skier deux journées est donc le tarif 1.

2. **Utiliser le graphique ci-dessous qui donne les prix en euros des forfaits en fonction du nombre de jours skiés.**



Déterminer par lecture graphique :

2. a. Le tarif pour lequel le prix payé est proportionnel au nombre de jours skiés. On justifiera la réponse.

- Le tarif 1 est représenté par une droite passant par l'origine du repère : le prix payé avec le tarif 1 est donc proportionnel au nombre de jours skiés.
  Le prix payé avec le tarif 1 pour six jours de ski est environ de 243 euros et avec le tarif 2 d'environ 223 euros. La différence de tarif est donc de 20 euros.
- Le tarif 2 est représenté par une droite ne passant pas par l'origine du repère : le prix payé avec le tarif 2 n'est donc pas proportionnel au nombre de jours skiés.

2. b. Une estimation de la différence de prix entre les deux tarifs pour 6 jours de ski.
Le prix payé avec le tarif 1 pour six jours de ski est environ de 243 euros et avec le tarif 2 d'environ 223 euros. La différence de tarif est donc de 20 euros. On visualise l'écart en rouge sur le graphique.

2. c. Le nombre de journées de ski à partir duquel le tarif 2 est plus intéressant.
Les droites se croisent au point d'abscisse 3,65. Le nombre de journées de ski à partir duquel le tarif 2 est plus intéressant est donc de 4 jours.

2. d. Le nombre maximum de jours de ski que peut faire Melchior avec un budget de 275 €.
Avec 275 euros, Melchior peut skier sept jours en utilisant le tarif 2. On visualise la procédé de lecture d'antécédent en bleu sur le graphique.
Il lui reste de l'argent comme on peut aisément le calculer :

$$275 - (31 + 7 \times 32) = 20\text{€}$$

Fin du devoir