Corrigé de l'exercice 1

▶**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}3471 &= 3 \times 1157\\ &= 3 \times 13 \times 89\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3560 &= 2 \times 1780\\ &= 2 \times 2 \times 890\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 445\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 89\end{aligned}$$

461 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}560 &= 2 \times 280\\ &= 2 \times 2 \times 140\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 70\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 35\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7\end{aligned}$$

$$302 = 2 \times 151$$

▶**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 3 560 et 3 471.
D'après la question 1), on sait que les nombres 3 560 et 3 471 ont comme facteurs premiers communs : 89.
On en déduit que le PGCD des nombres 3 560 et 3 471 est : 89.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 3 560 et de 3 471.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(3\,560;\ 3\,471) = \dfrac{3\,560 \times 3\,471}{89} = 138\,840$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(3\,560;\ 3\,471) = 89$, alors les "facteurs complémentaires" de $3\,560 = 2\times2\times2\times5\times89$ sont : 2 , 2 , 2 , 5. On en déduit que $PPCM(3\,560;\ 3\,471) = 3\,471 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 138\,840$.

▶**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 302 est :
$302 = 2 \times 151$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 151.
Le nombre cherché est par conséquent 302 et le carré parfait obtenu est 91 204.

▶**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(3 560 ; 3 471) = 89, donc on obtient :
$\dfrac{3\,560{\div 89}}{3\,471{\div 89}} = \dfrac{40}{39}$.

▶**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 3 560 et 3 471, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{8{\times 39}}{3\,560{\times 39}} + \dfrac{7{\times 40}}{3\,471{\times 40}} = \dfrac{312}{138\,840} + \dfrac{280}{138\,840} = \dfrac{592{\div 8}}{138\,840{\div 8}} = \dfrac{74}{17\,355}$.

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

353 est un nombre premier.

$702 = 2 \times 351$
$= 2 \times 3 \times 117$
$= 2 \times 3 \times 3 \times 39$
$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13$

$754 = 2 \times 377$
$= 2 \times 13 \times 29$

617 est un nombre premier.

$652 = 2 \times 326$
$= 2 \times 2 \times 163$

►**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 702 et 754.
D'après la question 1), on sait que les nombres 702 et 754 ont comme facteurs premiers communs : 2,13.
On en déduit que le PGCD des nombres 702 et 754 est : $2 \times 13 = 26$.
Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 702 et de 754.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(702;\ 754) = \dfrac{702 \times 754}{26} = 20\,358$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(702;\ 754) = 26 = 2 \times 13$, alors les "facteurs complémentaires" de $702 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13$ sont : 3 , 3 , 3. On en déduit que $PPCM(702;\ 754) = 754 \times 3 \times 3 \times 3 = 20\,358$.

►**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 652 est :
$652 = 2 \times 2 \times 163$.
Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 163.
Le nombre cherché est par conséquent 163 et le carré parfait obtenu est 106 276.

►**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(702 ; 754) = 26, donc on obtient :
$\dfrac{702 \div 26}{754 \div 26} = \dfrac{27}{29}$.

►**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 702 et 754, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{48 \times 29}{702 \times 29} + \dfrac{25 \times 27}{754 \times 27} = \dfrac{1\,392}{20\,358} + \dfrac{675}{20\,358} = \dfrac{2\,067 \div 39}{20\,358 \div 39} = \dfrac{53}{522}$.

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$663 = 3 \times 221$
$= 3 \times 13 \times 17$

$4268 = 2 \times 2134$
$= 2 \times 2 \times 1067$
$= 2 \times 2 \times 11 \times 97$

61 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}2619 &= 3 \times 873\\ &= 3 \times 3 \times 291\\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 97\end{aligned}$$

293 est un nombre premier.

►2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 4 268 et 2 619.

D'après la question 1), on sait que les nombres 4 268 et 2 619 ont comme facteurs premiers communs : 97.

On en déduit que le PGCD des nombres 4 268 et 2 619 est : 97.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 4 268 et de 2 619.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.

Donc : $PPCM(4\,268;\ 2\,619) = \dfrac{4\,268 \times 2\,619}{97} = 115\,236$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(4\,268;\ 2\,619) = 97$, alors les "facteurs complémentaires" de $4\,268 = 2 \times 2 \times 11 \times 97$ sont : 2 , 2 , 11. On en déduit que $PPCM(4\,268;\ 2\,619) = 2\,619 \times 2 \times 2 \times 11 = 115\,236$.

►3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 61 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 61.

Le nombre cherché est par conséquent 61 et le carré parfait obtenu est 3 721.

►4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(4 268 ; 2 619) = 97, donc on obtient :
$\dfrac{4\,268 \div 97}{2\,619 \div 97} = \dfrac{44}{27}$.

►5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 4 268 et 2 619, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{50 \times 27}{4\,268 \times 27} + \dfrac{47 \times 44}{2\,619 \times 44} = \dfrac{1\,350}{115\,236} + \dfrac{2\,068}{115\,236} = \dfrac{3\,418 \div 2}{115\,236 \div 2} = \dfrac{1\,709}{57\,618}$.

Corrigé de l'exercice 4

►1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned}3382 &= 2 \times 1691\\ &= 2 \times 19 \times 89\end{aligned}$$

709 est un nombre premier.

239 est un nombre premier.

$$\begin{aligned}3560 &= 2 \times 1780\\ &= 2 \times 2 \times 890\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 445\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 89\end{aligned}$$

607 est un nombre premier.

▶**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 3 560 et 3 382.

D'après la question 1), on sait que les nombres 3 560 et 3 382 ont comme facteurs premiers communs : 2,89.

On en déduit que le PGCD des nombres 3 560 et 3 382 est : $2 \times 89 = 178$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 3 560 et de 3 382.

En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.

Donc : $PPCM(3\,560;\ 3\,382) = \dfrac{3\,560 \times 3\,382}{178} = 67\,640$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(3\,560;\ 3\,382) = 178 = 2 \times 89$, alors les "facteurs complémentaires" de $3\,560 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 89$ sont : 2 , 2 , 5. On en déduit que $PPCM(3\,560;\ 3\,382) = 3\,382 \times 2 \times 2 \times 5 = 67\,640$.

▶**3.** Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 709 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 709.

Le nombre cherché est par conséquent 709 et le carré parfait obtenu est 502 681.

▶**4.** Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(3 560 ; 3 382) = 178, donc on obtient :

$\dfrac{3\,560 \div 178}{3\,382 \div 178} = \dfrac{20}{19}$.

▶**5.** Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 3 560 et 3 382, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.

$\dfrac{31 \times 19}{3\,560 \times 19} + \dfrac{21 \times 20}{3\,382 \times 20} = \dfrac{589}{67\,640} + \dfrac{420}{67\,640} = \dfrac{1\,009}{67\,640}$.

Corrigé de l'exercice 5

▶**1.** Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$\begin{aligned} 1800 &= 2 \times 900 \\ &= 2 \times 2 \times 450 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 225 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 75 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 25 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 172 &= 2 \times 86 \\ &= 2 \times 2 \times 43 \end{aligned}$$

127 est un nombre premier.

829 est un nombre premier.

$$\begin{aligned} 950 &= 2 \times 475 \\ &= 2 \times 5 \times 95 \\ &= 2 \times 5 \times 5 \times 19 \end{aligned}$$

▶**2.** En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 800 et 950.

D'après la question 1), on sait que les nombres 1 800 et 950 ont comme facteurs premiers communs : 2,5,5.

On en déduit que le PGCD des nombres 1 800 et 950 est : $2 \times 5 \times 5 = 50$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 800 et de 950.
En voici deux :

a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a;\ b) \times PPCM(a;\ b)$.
Donc : $PPCM(1\,800;\ 950) = \dfrac{1\,800 \times 950}{50} = 34\,200$.

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.
Comme $PGCD(1\,800;\ 950) = 50 = 2 \times 5 \times 5$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,800 = 2\times2\times2\times3\times3\times5\times5$ sont : 2 , 2 , 3 , 3. On en déduit que $PPCM(1\,800;\ 950) = 950\times2\times2\times3\times3 = 34\,200$.

▶3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 127 est lui-même, car c'est un nombre premier. Il faut donc encore multiplier ce nombre par le facteur 127.
Le nombre cherché est par conséquent 127 et le carré parfait obtenu est 16 129.

▶4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction estde diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), PGCD(1 800 ; 950) = 50, donc on obtient :
$\dfrac{1\,800{\scriptstyle \div 50}}{950{\scriptstyle \div 50}} = \dfrac{36}{19}$.

▶5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâceà la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 800 et 950, qui est par définition le plus petitmultiple commun de ces deux nombres.
$\dfrac{35{\scriptstyle \times 19}}{1\,800{\scriptstyle \times 19}} + \dfrac{35{\scriptstyle \times 36}}{950{\scriptstyle \times 36}} = \dfrac{665}{34\,200} + \dfrac{1\,260}{34\,200} = \dfrac{1\,925{\scriptstyle \div 25}}{34\,200{\scriptstyle \div 25}} = \dfrac{77}{1\,368}$.

Corrigé de l'exercice 6

▶1. Les nombres 42 130 et 18 810 sont-ils premiers entre eux ?
42 130 et 18 810 se terminent tous les deux par zéro donc ils sont divisibles par 10.
42 130 et 18 810 ne sont donc pas premiers entre eux

▶2. Calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 42 130 et 18 810.
On calcule le PGCD des nombres 42 130 et 18 810 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$42\ 130 = 18\ 810 \times 2 + 4\ 510$

$18\ 810 = 4\ 510 \times 4 + 770$

$4\ 510 = 770 \times 5 + 660$

$770 = 660 \times 1 + 110$

$660 = 110 \times 6 + 0$

$\boxed{\text{Donc le PGCD de 42 130 et 18 810 est 110}}$.

▶3. Simplifier la fraction $\dfrac{42\ 130}{18\ 810}$ pour la rendre irréductible en indiquant la méthode.

$$\frac{42\ 130}{18\ 810} = \frac{42\ 130 \div 110}{18\ 810 \div 110} = \boxed{\frac{383}{171}}$$

Corrigé de l'exercice 7

▶**1.** Les nombres 8 190 et 1 287 sont-ils premiers entre eux ?
La somme des chiffres de 8 190 et celle de 1 287 sont divisibles par neuf donc ils sont divisibles par 9.
8 190 et 1 287 ne sont donc pas premiers entre eux

▶**2.** Calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 8 190 et 1 287.
On calcule le PGCD des nombres 8 190 et 1 287 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$8\ 190 = 1\ 287 \times 6 + 468$

$1\ 287 = 468 \times 2 + 351$

$468 = 351 \times 1 + 117$

$351 = 117 \times 3 + 0$

$\boxed{\text{Donc le PGCD de 8 190 et 1 287 est 117}}$.

▶**3.** Simplifier la fraction $\dfrac{8\ 190}{1\ 287}$ pour la rendre irréductible en indiquant la méthode.

$$\begin{aligned}\frac{8\ 190}{1\ 287} &= \frac{8\ 190 \div 117}{1\ 287 \div 117}\\ &= \boxed{\frac{70}{11}}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 8

▶**1.** Les nombres 7 294 et 798 sont-ils premiers entre eux ?
7 294 et 798 sont deux nombres pairs donc ils sont divisibles par 2.
7 294 et 798 ne sont donc pas premiers entre eux

▶**2.** Calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 7 294 et 798.
On calcule le PGCD des nombres 7 294 et 798 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$7\ 294 = 798 \times 9 + 112$

$798 = 112 \times 7 + 14$

$112 = 14 \times 8 + 0$

$\boxed{\text{Donc le PGCD de 7 294 et 798 est 14}}$.

▶**3.** Simplifier la fraction $\dfrac{7\ 294}{798}$ pour la rendre irréductible en indiquant la méthode.

$$\begin{aligned}\frac{7\ 294}{798} &= \frac{7\ 294 \div 14}{798 \div 14}\\ &= \boxed{\frac{521}{57}}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9

►**1.** Les nombres 45 747 et 18 513 sont-ils premiers entre eux ?
La somme des chiffres de 45 747 et celle de 18 513 sont divisibles par neuf donc ils sont divisibles par 9.
45 747 et 18 513 ne sont donc pas premiers entre eux

►**2.** Calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 45 747 et 18 513.
On calcule le PGCD des nombres 45 747 et 18 513 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$45\ 747 = 18\ 513 \times 2 + 8\ 721$

$18\ 513 = 8\ 721 \times 2 + 1\ 071$

$8\ 721 = 1\ 071 \times 8 + 153$

$1\ 071 = 153 \times 7 + 0$

$\boxed{\text{Donc le PGCD de 45 747 et 18 513 est 153}}$.

►**3.** Simplifier la fraction $\dfrac{45\ 747}{18\ 513}$ pour la rendre irréductible en indiquant la méthode.

$$\frac{45\ 747}{18\ 513} = \frac{45\ 747 \div 153}{18\ 513 \div 153} = \boxed{\frac{299}{121}}$$

Corrigé de l'exercice 10

►**1.** Les nombres 1 190 et 255 sont-ils premiers entre eux ?
1 190 et 255 se terminent tous les deux par zéro ou cinq donc ils sont divisibles par 5.
1 190 et 255 ne sont donc pas premiers entre eux

►**2.** Calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 1 190 et 255.
On calcule le PGCD des nombres 1 190 et 255 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$1\ 190 = 255 \times 4 + 170$

$255 = 170 \times 1 + 85$

$170 = 85 \times 2 + 0$

$\boxed{\text{Donc le PGCD de 1 190 et 255 est 85}}$.

►**3.** Simplifier la fraction $\dfrac{1\ 190}{255}$ pour la rendre irréductible en indiquant la méthode.

$$\frac{1\ 190}{255} = \frac{1\ 190 \div 85}{255 \div 85} = \boxed{\frac{14}{3}}$$